

Révision pour le DS - 2

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en millier, dans cette population au bout du n -ième jour.

Au début de l'étude, la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour, elle compte 5 100 fourmis.

Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$.

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = A \times V_n$.

On admet alors que, pour tout entier naturel n , $V_n = A^n \times V_0$.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1} .

En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1} \times A \times P$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Pour tout entier naturel n , on admet que $A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}$

d. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - 0,9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte.

Révision pour le DS - 2

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en millier, dans cette population au bout du n -ième jour.

Au début de l'étude, la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour, elle compte 5 100 fourmis.

Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$.

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = A \times V_n$.

On admet alors que, pour tout entier naturel n , $V_n = A^n \times V_0$.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1} .

En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1} \times A \times P$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Pour tout entier naturel n , on admet que $A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}$

d. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - 0,9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte.