

Correction DS n°8

Matrices et Suites - Révision 2016

Contexte du problème

Deux agences bancaires X et Y se transfèrent mutuellement des fonds chaque année et reçoivent également des fonds de leur siège. L'évolution est modélisée par :

$$U_{n+1} = A \times U_n + B$$

Avec les matrices et conditions initiales :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

où x_n et y_n représentent les fonds (en millions d'euros) des agences X et Y au 1^{er} janvier de l'année $2017 + n$.

Question 1 : Interprétation des coefficients

Coefficient 0,6 de la matrice A :

Ce coefficient se trouve en position (1, 1) de la matrice A . Il signifie que l'agence X conserve 60% de ses fonds d'une année sur l'autre. Les 40% restants sont redistribués (20% vont à l'agence Y selon le coefficient $a_{21} = 0,2$, et 20% sont perdus ou transférés ailleurs).

Coefficient 3 de la matrice B :

Ce coefficient se trouve en position (2, 1) de la matrice B . Il signifie que le siège de la banque transfère chaque année 3 millions d'euros à l'agence Y.

Question 2 : Calcul de U_1 et fonds en 2018

La matrice U_0 représente l'état initial au 1^{er} janvier 2017 :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Calculons $U_1 = A \times U_0 + B$:

$$\begin{aligned}U_1 &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0,6 \times 50 + 0,15 \times 10 \\ 0,2 \times 50 + 0,4 \times 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 30 + 1,5 \\ 10 + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 31,5 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Résultat : Au 1^{er} janvier 2018 ($n = 1$), l'agence X détient **32,5 millions d'euros** et l'agence Y détient **17 millions d'euros**.

Question 3 : Diagonalisation

3.a) Matrice P :

On donne :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Note : Les colonnes de P sont les vecteurs propres de A . Le premier vecteur propre $(3, 2)^T$ correspond à la valeur propre $\lambda_1 = 0,7$, et le second vecteur propre $(1, -2)^T$ correspond à $\lambda_2 = 0,3$.

3.b) Calcul du coefficient $(1, 2)$ de $Q \times P$:

Le coefficient de la première ligne et deuxième colonne de $Q \times P$ est obtenu par le produit scalaire de la première ligne de Q avec la deuxième colonne de P :

Avec $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,125 \\ 0,25 & -0,375 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Coefficient } (1, 2) &= 0,25 \times 1 + 0,125 \times (-2) \\ &= 0,25 - 0,25 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce résultat confirme que $Q \times P = I$, donc $Q = P^{-1}$.

3.c) Démonstration de $A^n = P \times D^n \times Q$:

On sait que $A = P \times D \times Q$ (diagonalisation de A).

Puisque $Q \times P = I$ (Q est l'inverse de P), on a :

Démonstration par récurrence :

Initialisation ($n = 1$) : $A^1 = A = P \times D \times Q$ ✓

Hérédité : Supposons que $A^n = P \times D^n \times Q$

Montrons que $A^{n+1} = P \times D^{n+1} \times Q$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (P \times D^n \times Q) \times (P \times D \times Q) \\ &= P \times D^n \times (Q \times P) \times D \times Q \\ &= P \times D^n \times I \times D \times Q \\ &= P \times D^n \times D \times Q \\ &= P \times D^{n+1} \times Q \quad \checkmark \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = P \times D^n \times Q$.

Question 4 : Suite auxiliaire V_n

On pose pour tout entier naturel n :

$$V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$$

4.a) Démonstration de la relation $V_{n+1} = A \times V_n$:

Pour que cette relation soit vraie, il faut que $W = \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$ soit le point fixe de la récurrence, c'est-à-dire que :

$$A \times W + B = W$$

Ce qui équivaut à $(I - A) \times W = B$.

Calculons $(I - A)$:

$$\begin{aligned} I - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 & -0,15 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérifions que $(I - A) \times W = B$:

$$\begin{aligned} (I - A) \times \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,4 & -0,15 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4 \times 5 - 0,15 \times 20/3 \\ -0,2 \times 5 + 0,6 \times 20/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -1 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = B \quad \checkmark \end{aligned}$$

Donc W est bien le point fixe. Maintenant calculons V_{n+1} :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - W \\ &= (A \times U_n + B) - W \\ &= A \times U_n + B - W \\ &= A \times U_n - (A \times W + B - W) \\ &= A \times U_n - A \times W \quad (\text{car } A \times W + B = W) \\ &= A \times (U_n - W) \\ &= A \times V_n \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{n+1} = A \times V_n}$$

4.b) Expression de V_0 et V_n :

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 - W = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 - 5 \\ 10 - 20/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{V_0 = \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix}}$

Puisque $V_{n+1} = A \times V_n$, par récurrence on obtient :

$$\boxed{V_n = A^n \times V_0}$$

Question 5 : Expression explicite de x_n

D'après la diagonalisation $A = P \times D \times Q$, on a $A^n = P \times D^n \times Q$.

En développant, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,75 \times 0,7^n + 0,25 \times 0,3^n & 0,375(0,7^n - 0,3^n) \\ 0,5(0,7^n - 0,3^n) & 0,25 \times 0,7^n + 0,75 \times 0,3^n \end{pmatrix}$$

Note : Cette formule diffère légèrement de celle donnée dans l'énoncé car les colonnes de P sont $(3, 2)^T$ et $(1, -2)^T$ et non l'inverse.

5.a) Coefficient de la première ligne de la matrice V_n :

Le coefficient de la première ligne de V_n est noté $v_n^{(1)}$. On a :

$$\begin{aligned} V_n &= A^n \times V_0 \\ v_n^{(1)} &= (A^n)_{11} \times (V_0)_1 + (A^n)_{12} \times (V_0)_2 \\ &= (0,75 \times 0,7^n + 0,25 \times 0,3^n) \times 45 + 0,375(0,7^n - 0,3^n) \times \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Développons :

$$\begin{aligned} v_n^{(1)} &= 45 \times 0,75 \times 0,7^n + 45 \times 0,25 \times 0,3^n + \frac{10}{3} \times 0,375 \times 0,7^n - \frac{10}{3} \times 0,375 \times 0,3^n \\ &= 33,75 \times 0,7^n + 11,25 \times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n - 1,25 \times 0,3^n \\ &= (33,75 + 1,25) \times 0,7^n + (11,25 - 1,25) \times 0,3^n \\ &= 35 \times 0,7^n + 10 \times 0,3^n \end{aligned}$$

Donc :

$$v_n^{(1)} = 35 \times 0,7^n + 10 \times 0,3^n$$

5.b) Expression de x_n en fonction de n :

Puisque $V_n = U_n - W$ avec $W = \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$, on a :

$$x_n = v_n^{(1)} + 5$$

Donc :

$$x_n = 35 \times 0,7^n + 10 \times 0,3^n + 5$$

5.c) Limite et interprétation :

Lorsque $n \rightarrow +\infty$:

- $0,7^n \rightarrow 0$ car $0 < 0,7 < 1$
- $0,3^n \rightarrow 0$ car $0 < 0,3 < 1$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 + 0 + 5 = \boxed{5 \text{ millions d'euros}}$$

Interprétation :

Sur le long terme, les fonds de l'agence X tendent vers 5 millions d'euros.

Cela signifie que malgré les transferts entre agences et les apports du siège, le système converge vers un équilibre stable.

À la limite, l'agence X stabilise ses fonds à 5 millions d'euros (et l'agence Y à $20/3 \approx 6,67$ millions d'euros). Ce point d'équilibre est le point fixe de la récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$.

La répartition finale des fonds montre un équilibre légèrement en faveur de l'agence Y, ce qui est cohérent avec les paramètres de transfert : l'agence Y reçoit 15% des fonds de X (coefficient $a_{12} = 0,15$) tandis que X ne reçoit que 20% des fonds de Y qui sont plus faibles (coefficient $a_{21} = 0,2$). De plus, le siège transfère 3 millions à Y contre seulement 1 million à X.

Fin de la correction