

FAMILLES DE MATRICES

Premier cas :

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$, où a est un réel.

Remarque : On considérera qu'une matrice carrée d'ordre 2, autre que la matrice nulle, élevée à la puissance 0, est la matrice identité d'ordre 2.

Partie A : Généralités

- 1) Montrer que le produit de deux matrices de E est aussi une matrice de E .
- 2) Existe-t-il des matrices de E dont la somme est aussi une matrice de E ?
- 3) a) Déterminer les matrices de E qui sont inversibles.
b) Les inverses des matrices inversibles de E sont-elles aussi dans E ?

Partie B : Détermination de A^n , première méthode

- 1) On note respectivement I et J les matrices de E correspondant à $a = 1$ et $a = 0$.

On note par ailleurs $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Soit n un entier positif ou nul. Déterminer, selon les valeurs de n , la matrice J^n .
 - b) Déterminer, selon les valeurs de n , la matrice K^n .
 - c) Montrer que, pour tout entier n positif ou nul, $J^n \times K = K \times J^n = (-1)^n K$.
- 2) a) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ peut s'écrire en fonction de J , K et a .
b) Justifier alors l'égalité : Pour tout entier n positif ou nul, $A^n = J^n + \frac{K}{2}((2a-1)^n - (-1)^n)$.
c) En déduire le coefficient de la première ligne – première colonne de A^n .

Partie C : Détermination de A^n , deuxième méthode

- 1) a) Montrer qu'on peut définir une suite (a_n) de réels telle que, pour tout entier n naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \\ 1-a_n & a_n \end{pmatrix}.$$

- b) Déterminer, pour tout entier n positif ou nul, une relation entre a_{n+1} , a_n et n .
- 2) a) Soit α un réel. On définit la suite (b_n) par, pour tout entier n positif ou nul, $b_n = a_n - \alpha$.
Déterminer une valeur de α pour laquelle la suite (b_n) est géométrique.
b) Déterminer alors le terme général de la suite (a_n) en fonction de a et de n .
c) Déterminer à quelle condition sur le réel a la suite (a_n) converge et préciser sa limite.
d) En déduire la conséquence sur la matrice A^n .

Corrigé

Partie A

1) Soit a et b deux réels.

$$\text{En posant } A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 1-b & b \end{pmatrix},$$

$$\text{on a alors } A \times B = \begin{pmatrix} 2ab-a-b+1 & a+b-2ab \\ a+b-2ab & 2ab-a-b+1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si on pose } c = 2ab - a - b + 1, \text{ on a bien } A \times B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 1-c & c \end{pmatrix}, \text{ donc } A \times B \text{ est bien un élément de } E.$$

2) Avec les notations précédentes, on a : $A + B = \begin{pmatrix} a+b & 2-a-b \\ 2-a-b & a+b \end{pmatrix}$. Or la somme des coefficients des lignes (ou des colonnes) ne vaut pas 1, donc $A + B$ n'est jamais dans E .

$$3) \text{ a) Le déterminant de } A \text{ vaut } \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{vmatrix} = a^2 - (1-a)^2 = 2a-1.$$

Donc A est inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{b) Lorsque } A \text{ est inversible, } A^{-1} = \frac{1}{2a-1} \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2a-1} & \frac{a-1}{2a-1} \\ \frac{a-1}{2a-1} & \frac{a}{2a-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si on pose } a' = \frac{a}{2a-1}, \text{ on a bien } A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 1-a' \\ 1-a' & a' \end{pmatrix}, \text{ donc } A^{-1} \text{ est aussi dans } E.$$

Partie B

1) a) On a donc $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice identité 2×2 , et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a de plus $J^2 = I$ donc, pour tout entier k positif

$$\text{ou nul, } (J^2)^k = J^{2k} = I \text{ et alors } J^{2k+1} = J^{2k} \times J = J.$$

Conclusion : Pour tout entier n positif ou nul, J^n vaut I si n est pair et J si n est impair.

b) On remarque que $K^2 = 2K$. On conjecture donc que, pour tout entier n strictement positif, $K^n = 2^{n-1}K$. Cette formule se démontre par récurrence pour n supérieur ou égal à 1 grâce à l'égalité $K^{n+1} = K^n \times K = 2^{n-1}K \times K = 2^{n-1} \times K^2 = 2^{n-1} \times 2K = 2^n K$.

Conclusion : $K^0 = I$ et, pour tout entier n strictement positif, $K^n = 2^{n-1}K$.

c) Si n est pair, $J^n \times K = I \times K = K$ et $K \times J^n = K \times I = K$.

Si n est impair, $J^n \times K = J \times K$. Or on montre que $J \times K = -K$. De même, $K \times J^n = K \times J = -K$.

Conclusion : Pour tout entier n positif ou nul, $J^n \times K = K \times J^n = K$ si n est pair et $J^n \times K = K \times J^n = -K$ si n est impair.

$$\text{On a donc bien } J^n \times K = K \times J^n = (-1)^n K.$$

$$2) \text{ a) } A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aK + J.$$

b) Pour tout entier n positif ou nul, $A^n = (aK + J)^n$. Pour pouvoir développer cette expression, on peut utiliser le fait que, d'après la propriété B) 1) c), la multiplication des puissances de K et de J commutent. On a donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aK)^k \times J^{n-k} \text{ (Binôme de Newton)} \\
&= J^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (aK)^k \times J^{n-k} = J^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \times 2^{k-1} K \times J^{n-k} \text{ (d'après B) 1) b))} \\
&= J^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \times 2^{k-1} K \times (-1)^{n-k} \text{ (d'après B) 1) c))} \\
&= J^n + \frac{K}{2} \times (-1)^n \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \times 2^k \times (-1)^{-k}. \\
\text{Comme } (-1)^{-k} &= (-1)^k, \text{ on a : } A^n = J^n + \frac{K}{2} \times (-1)^n \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2a)^k \\
&= J^n + \frac{K}{2} \times (-1)^n \times ((1-2a)^n - 1) \text{ (binôme de Newton)} \\
&= J^n + \frac{K}{2} ((2a-1)^n - (-1)^n).
\end{aligned}$$

c) Si n est pair, $A^n = I + \frac{K}{2} ((2a-1)^n - 1)$. Comme le premier coefficient de I est 1 et celui de K aussi, le coefficient

$$\text{cherché est } 1 + \frac{1}{2} ((2a-1)^n - 1) = \frac{(2a-1)^n + 1}{2}.$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, } A^n = J + \frac{K}{2} ((2a-1)^n + 1).$$

$$\text{Comme le premier coefficient de } J \text{ est } 0, \text{ le coefficient cherché est } 0 + \frac{1}{2} ((2a-1)^n + 1) = \frac{(2a-1)^n + 1}{2}.$$

Dans les deux cas, le coefficient est le même.

Partie C

1) a) On a vu à la question A) 1) que le produit de deux matrices de E était une matrice de E .

Or A^n est le produit de n fois la matrice A , donc, par une récurrence évidente, on peut affirmer que A^n est dans E .
Donc elle est bien de la forme citée.

On remarquera, au vu de l'indication initiale, que $a_0 = 1$ puisque $A^0 = I$.

b) On a, pour tout entier n positif ou nul, $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1-a_{n+1} \\ 1-a_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$. Or $A^{n+1} = A^n \times A$,

i.e. $\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1-a_{n+1} \\ 1-a_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \\ 1-a_n & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$. Par identification des coefficients de la première ligne – première colonne, $a_{n+1} = a a_n + (1-a)(1-a_n)$,

i.e. $a_{n+1} = (2a-1)a_n + 1-a$. La suite (a_n) est arithmético-géométrique.

2) a) La relation de récurrence de la suite (a_n) peut s'écrire alors : $b_{n+1} + \alpha = (2a-1)(b_n + \alpha) + 1-a$, i.e.

$$b_{n+1} = (2a-1)b_n + 2a\alpha - \alpha + 1 - a - \alpha.$$

Une condition suffisante pour que la suite (b_n) soit géométrique est que $2a\alpha - \alpha + 1 - a - \alpha = 0$,

i.e. $\alpha(2a-2) + 1 - a = 0$. Si a est distinct de 1, alors α vaut $\frac{1}{2}$. Si $a = 1$, alors $\alpha = \frac{1}{2}$ convient.

Conclusion : On peut donc choisir $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Pour la valeur $\alpha = \frac{1}{2}$, la suite (b_n) est géométrique de raison $2a - 1$ et de premier terme $b_0 = a_0 - \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On a

donc, pour tout entier n positif ou nul, $b_n = \frac{1}{2}(2a - 1)^n$.

Donc $a_n = \frac{1}{2}(2a - 1)^n + \frac{1}{2}$.

c) Une suite géométrique est convergente si et seulement si sa raison est dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Or, si cette raison est 1, i.e. $2a - 1 = 1$, i.e. $a = 1$, alors la suite est constante égale à 1, donc convergente de limite 1.

La matrice A étant la matrice identité I , $A^n = I$.

Si $-1 < 2a - 1 < 1$, i.e. $0 < a < 1$, alors $(2a - 1)^n$ tend vers 0 et alors a_n tend vers $\frac{1}{2}$.

La matrice A^n tend alors vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Deuxième cas :

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

On note par ailleurs $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité d'ordre 2.

a) Calculer J^2 .

b) Montrer que M peut s'écrire comme une combinaison linéaire de I et de J et exprimer M^2 en fonction de I et J .

c) Montrer que toutes les matrices M de E commutent avec J , i.e. que $M \times J = J \times M$.

d) Déterminer les matrices M de E vérifiant $M^2 = M$.

e) Déterminer les matrices M de E vérifiant $M^2 = I$.

Corrigé

$$a) J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

$$b) M = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 3b \\ b & -b \end{pmatrix} = aI + bJ.$$

$$M^2 = (aI + bJ)^2 = a^2I^2 + 2abI \times J + b^2J^2 = a^2I + 2abJ + 4b^2I = (a^2 + 4b^2)I + 2abJ.$$

$$c) \text{ Comme } M = aI + bJ, \text{ on a } M \times J = (aI + bJ) \times J = aJ + bJ^2 \text{ et aussi } J \times M = J \times (aI + bJ) = aJ + bJ^2.$$

D'où l'égalité.

$$d) M^2 = M \text{ est équivalent à } (a^2 + 4b^2)I + 2abJ = aI + bJ, \text{ i.e. } (a^2 + 4b^2 - a)I = (b - 2ab)J.$$

Or ces deux matrices ne sont pas proportionnelles donc les facteurs sont nuls. Ainsi : $\begin{cases} a^2 + 4b^2 - a = 0 \\ b - 2ab = 0 \end{cases}$.

La deuxième ligne est équivalente à $b = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$.

Si $b = 0$, alors, d'après la première ligne, $a^2 - a = 0$, i.e. $a = 0$ ou $a = 1$.

Si $a = \frac{1}{2}$, alors $4b^2 = a^2 - a = \frac{1}{4}$ donc $b^2 = \frac{1}{16}$ donc $b = \frac{1}{4}$ ou $b = -\frac{1}{4}$.

Il y a donc quatre matrices solutions :

Si $(a; b) = (0; 0)$, c'est la matrice nulle. Si $(a; b) = (1; 0)$, c'est la matrice identité.

Si $(a; b) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Si $(a; b) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

e) $M^2 = I$ est équivalent à $(a^2 + 4b^2)I + 2abJ = I$, i.e. $(a^2 + 4b^2 - 1)I = -2abJ$.

Or, comme précédemment ces deux matrices ne sont pas proportionnelles donc les facteurs sont nuls.

Ainsi : $\begin{cases} a^2 + 4b^2 - 1 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$. La deuxième ligne est équivalente à $b = 0$ ou $a = 0$.

Si $b = 0$, alors, d'après la première ligne, $a^2 - 1 = 0$, i.e. $a = -1$ ou $a = 1$.

Si $a = 0$, alors $4b^2 = 1$ donc $b^2 = \frac{1}{4}$ donc $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$.

Il y a donc quatre matrices solutions :

Si $(a; b) = (-1; 0)$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Si $(a; b) = (1; 0)$, c'est la matrice identité.

Si $(a; b) = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}J$ et si $(a; b) = \left(0; -\frac{1}{2}\right)$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}J$.