

Séquence XIX – Matrices (partie 2)

Exercice 1

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ u_0 = 1 ; w_0 = -1 \end{cases}$$

1. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$, justifier qu'on peut traduire ce problème sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A et X_0 des matrices à préciser.
2. Exprimer X_n en fonction de A et de n .
3. Calculer A^2 et en déduire une expression de A^n selon la parité de n .
4. En déduire une expression de X_n , puis de u_n et w_n en fonction de n .
5. Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles ?

Solution de l'exercice 1

1. On vérifie par produit matriciel que le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ u_0 = 1 ; w_0 = -1 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_2$ avec I_2 la matrice identité de taille 2. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^{2k} = 8^k I_2 = \begin{pmatrix} 2^{3k} & 0 \\ 0 & 2^{3k} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = 8^k A = \begin{pmatrix} 2 \times 8^k & 2 \times 8^k \\ 2 \times 8^k & -2 \times 8^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3k+1} & 2^{3k+1} \\ 2^{3k+1} & -2^{3k+1} \end{pmatrix}$$

4. Pour $n = 2k$, qui est pair, on a donc $X_{2k} = \begin{pmatrix} 2^{3k} \\ -2^{3k} \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} u_{2k} = 2^{3k} \\ w_{2k} = -2^{3k} \end{cases}$

et, pour $n = 2k + 1$, qui est impair, $X_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{3k+2} \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} u_{2k+1} = 0 \\ w_{2k+1} = 2^{3k+2} \end{cases}$

5. Les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc divergentes.



Exercice 2

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}w_n \\ u_0 = 10; w_0 = 20 \end{cases}$$

1. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$, justifier qu'on peut écrire ce problème sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A et X_0 des matrices à préciser.
2. Exprimer X_n en fonction de A et de n .
3. Calculer A^2 et en déduire une expression de A^n selon la parité de n .
4. En déduire une expression de X_n , puis de u_n et w_n en fonction de n .
5. Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles ?

Solution de l'exercice 2

1. On vérifie par produit matriciel que le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}w_n \\ u_0 = 10; w_0 = 20 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

$$3. A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_2 \text{ avec } I_2 \text{ la matrice identité de dimension 2. On a donc, pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$$A^{2k} = \frac{1}{2^k}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = \frac{1}{2^k}A = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{2^k} & 2 \times \frac{1}{2^k} \\ 2 \times \frac{1}{2^k} & -2 \times \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & -\frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Pour } n = 2k, \text{ on a donc } X_{2k} = \begin{pmatrix} 10 \times \frac{1}{2^k} \\ 20 \times \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } \begin{cases} u_{2k} = 10 \times \frac{1}{2^k} \\ w_{2k} = 20 \times \frac{1}{2^k} \end{cases}$$

$$\text{et pour } n = 2k + 1, X_{2k+1} = \begin{pmatrix} 30 \times \frac{1}{2^{k-1}} \\ -10 \times \frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } \begin{cases} u_{2k+1} = 30 \times \frac{1}{2^{k-1}} \\ w_{2k+1} = -10 \times \frac{1}{2^{k-1}} \end{cases}$$

5. Les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.



Exercice 3

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver la matrice A telle que $x_{n+1} = Ax_n$.

En déduire que $x_n = A^n x_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p > 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} N + 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Solution de l'exercice 3

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul matriciel donne que $x_{n+1} = Ax_n$, et par récurrence, on en déduit que $x_n = A^n x_0$.

2. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $p > 3$, on a alors $N^p = N^3 \times N^{p-3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

3. Écrivons que $A = 3I + N$ et remarquons que les matrices $3I$ et N commutent. La formule du binôme, puisque $N^p = O_3$ dès que $p > 3$, permet d'obtenir le résultat demandé. (il est également possible de procéder par récurrence).
4. On obtient alors :

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n &= 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n &= 7 \times 3^n \end{aligned}$$

Exercice 4

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population, d'une année sur l'autre, varie donc en fonction

- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction)
- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction

- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction)
- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement g_n et b_n le nombre de gardons et de brochets, au 1^{er} janvier de l'année 2021 + n .

Partie 1.

Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites (g_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v_n le vecteur $v_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation lie v_n , v_{n+1} et A ? En déduire une relation entre v_n , A et v_0 .
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .
4. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous?

Partie 2.

Pour enrayer l'extinction des espèces, on décide de relâcher chaque année 30 gardons dans l'étang.

Dans cette deuxième modélisation, les deux suites (g_n) et (b_n) vérifient donc maintenant les relations

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n + 30 \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

de sorte que, en gardant les mêmes notations, on a $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse.
2. On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$.
4. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0 . On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n) .
5. Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas? Interpréter...

Cet exercice est inspiré de travaux réels réalisées à la fin du XIX^{ème} siècle par deux spécialistes de la dynamique des populations : l'italien Vito Volterra et de l'américain James Lotka.

Solution de l'exercice 4

Partie 1.

1. On a $v_{n+1} = Av_n$. Par récurrence, on en déduit que $v_n = A^n v_0$.
2. $\det(P) = 1 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On a $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.
4. Par récurrence, ou parce qu'on connaît la formule pour les puissances de matrices diagonales, on obtient

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$$

5. On part de la relation $D = P^{-1}AP$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on trouve que $A = PDP^{-1}$. On démontre alors la relation par récurrence. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors
 - Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$.
 - Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

6. On trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2 \times 0,9^n - 2 \times 0,7^n & -0,9^n + 2 \times 0,7^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g_n &= (2 \times 0,9^n - 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 0,7^n) \times 100 \\ b_n &= (2 \times 0,9^n - 2 \times 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 2 \times 0,7^n) \times 100 \end{aligned}$$

Puisque les suites $(0,9^n)$ et $(0,7^n)$ tendent vers 0, on en déduit que les suites (g_n) et (b_n) tendent toutes deux vers 0. Les espèces vont s'éteindre !

Partie 2.

1. On vérifie que $(A - I_2)$ est inversible et que

$$(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{40}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

2. On obtient $C = (A - I_2)^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}$.
3. Par exemple, la première ligne de V_{n+1} est $g_{n+1} - 500 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$
et la première ligne de Av_n est $1,1g_n - 1,1 \times 500 - 0,2b_n + 0,2 \times 400 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$.
4. Comme dans la partie 1, on a $v_n = A^n v_0$ et les suites (x_n) et (y_n) tendent vers 0.
5. Puisque $g_n = x_n + 500$, la suite (g_n) tend vers 500. De même, la suite (b_n) tend vers 400. Il suffit donc d'introduire 30 gardons chaque année pour arriver à des populations d'équilibre de 500 gardons et 400 brochets... surprenant !

Exercice 5

Le gestionnaire d'un site web désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web. Ce site est composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes. Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira soit sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit il restera sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°3, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n , on définit les événements et les probabilités suivants :

A_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°1 » et on note $a_n = P(A_n)$.

B_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°2 » et on note $b_n = P(B_n)$.

C_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

Ainsi

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, où $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n , n étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n , b_n et c_n en fonction de n . En déduire que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

Correction**Exercice XIX.5**

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 (événement A_n), il ne reste pas sur cette page donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$.

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 (événement B_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Si, après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 (événement C_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

De plus $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

$$\text{Donc } a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

On aurait pu aussi construire un arbre pondéré pour représenter la situation.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

2. D'après la question précédente :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 0 \times a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc en prenant } M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ on a } U_{n+1} = MU_n.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $U_n = M^n U_0$.

- Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = U_0$ car M^0 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que la propriété est vraie au rang p avec $p \geq 0$, c'est-à-dire $U_p = M^p U_0$.

On sait que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$ donc $U_{p+1} = MU_p$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_p = M^p U_0$, donc $U_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$.

Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire, donc elle est pour tout $n \geq 0$.

Donc, pour tout entier naturel n , $U_n = M^n U_0$.

3. Soit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

$$MU = U \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 2x & (L1) \\ x + y + z = 4y & (L2) \\ 3x + y + z = 4z & (L3) \\ x + y + z = 1 & (L4) \end{cases}$$

De (L2) et (L4) on déduit $4y = 1$ d'où $y = \frac{1}{4}$.

(L1) $\iff x + y + z = 3x$ ce qui donne en utilisant (L4) : $1 = 3x \iff x = \frac{1}{3}$.

(L4) $\iff z = 1 - x - y \implies z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Comme on n'a pas procédé par équivalences, il faut vérifier que pour les trois valeurs de x , y et z trouvées, les quatre lignes du système sont vérifiées, ce qui se fait sans problème.

L'unique matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$, est $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

4. Pour n entier non nul, on a : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \end{pmatrix}$

$U_n = M^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} \right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n \times 2}{3} \right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{(-\frac{1}{2})^n}{-3} \right) c_0 \end{cases}$$

On constate que $b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 = \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0)$; or $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ donc $b_n = \frac{1}{4}$.

On sait qu'une suite géométrique de raison q où $-1 < q < 1$ est convergente vers 0 donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 ; \text{ on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} = 0 .$$

D'après les théorèmes sur les limites, on peut dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{1}{3} .$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}a_0 + \frac{5}{12}b_0 + \frac{5}{12}c_0 = \frac{5}{12}(a_0 + b_0 + c_0) = \frac{5}{12} .$$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{3} \approx 33,33\%$ du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{4}$ donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{4} = 25\%$ du temps de visite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{5}{12}$ donc à long terme, la page 3 du site sera consultée $100 \times \frac{5}{12} \approx 41,67\%$ du temps de visite.

Exercice 6

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte.
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte.

On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

(a) Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

(b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

(c) En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admettra sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

2. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

(b) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale notée D que l'on précisera.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1 - 0,7^n}{3} \\ \frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix}$$

4. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

Exercice XIX.6

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte, donc il reste 80 % de souris dans le compartiment A ;
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte, donc il reste 90 % de souris dans le compartiment B.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

- a. Lors de la première ouverture des portes il reste dans A 80 % des souris présentes soit une proportion de $0,5 \times 0,8 = 0,40$ et il rentre 10 % de souris venant de B soit $0,5 \times 0,1 = 0,05$. Donc il y aura dans A au total $0,40 + 0,05 = 0,45$ comme proportion de souris.

Il en reste donc $1 - 0,45 = 0,55$ pour B. Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

- b. Lors de la $n+1$ -ième ouverture de porte, il restera dans A 80 % des souris présentes, soit $0,8 a_n$ et il en vient 10 % de B soit $0,10 b_n$; donc $a_{n+1} = 0,8 a_n + 0,1 b_n$.

Lors de la $n+1$ -ième ouverture de porte, il restera dans B 90 % des souris présentes, soit $0,9 b_n$ et il en vient 20 % de A soit $0,20 a_n$; donc $b_{n+1} = 0,2 a_n + 0,9 b_n$.

c. D'après la question précédente, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$

On cherche une matrice carrée d'ordre 2 $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que $MU_n = U_{n+1}$.

$$MU_n = U_{n+1} \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha a_n + \beta b_n \\ \gamma a_n + \delta b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,1b_n \\ 0,2a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

d. La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est donnée par U_3 ; à la calculatrice, on trouve $M^3 = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,219 \\ 0,438 & 0,781 \end{pmatrix}$

$$U_3 = M^3 \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,219 \\ 0,438 & 0,781 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}$$

La répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours est respectivement 39,05 % et 60,95 %.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 2.

Donc $\frac{1}{3}P^2 = I$ ce qui entraîne que $P \times \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}P \times P = I$; la matrice P est donc inversible et son inverse est $P^{-1} = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $P^{-1}M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \times 0,8 + 1 \times 0,2 & 1 \times 0,1 + 1 \times 0,9 \\ 2 \times 0,8 + (-1) \times 0,2 & 2 \times 0,1 + (-1) \times 0,9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix}$
 $(P^{-1}M)P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 1,4 \times 1 + (-0,7) \times 2 & 1,4 \times 1 + (-0,7) \times (-1) \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1}MP$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ que l'on appelle D .

c. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $M^n = PD^nP^{-1}$.

- $P^{-1}MP = D \iff PP^{-1}MP = PD \iff MP = PD \iff MPP^{-1} = PDP^{-1} \iff M = PDP^{-1}$
donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 1.
- On suppose que pour tout entier $p > 1$ la propriété est vraie, c'est-à-dire que $M^p = PD^pP^{-1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence $M^p = PD^pP^{-1}$ et on sait que $M = PDP^{-1}$ donc :
 $M^{p+1} = M \times M^p = PDP^{-1} \times PD^pP^{-1} = PDP^{-1}PD^pP^{-1} = PDD^pP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$
donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- La propriété est vraie au rang 1; elle est héréditaire pour tout $p \geq 1$ donc d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Donc, pour tout $n \geq 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1-0,7^n}{3} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$

3. Pour avoir la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage, il faut chercher $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1-0,7^n}{3} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n + 1-0,7^n}{6} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n + 2+0,7^n}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+0,7^n}{6} \\ \frac{4-0,7^n}{6} \end{pmatrix}$$

La suite $(0,7^n)$ est géométrique de raison $0,7$; or $-1 < 0,7 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2+0,7^n = 2$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4-0,7^n = 4$; et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

On en conclut que la répartition à long terme des souris dans les compartiments est de $\frac{1}{3}$ pour le compartiment A et de $\frac{2}{3}$ pour le compartiment B.

Exercice 7

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.

Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année 2012 + n .

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} &= 2 \times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \text{ pour tout entier } n \geq 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. (a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0 .

- (b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{15000} \begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.
(b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n .
(c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n = \frac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Exercice XIX.7

CORRECTION

Partie A- Un modèle simple

1.a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1 u_n - 2000 v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-5} + 0,6 v_n \end{cases}$$

En utilisant la notation matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} = A \times U_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$$

1.b. Pour tout entier naturel n

$$U_n = A^n \times U_0$$

$$2018 - 2012 = 6.$$

On doit déterminer U_6 .

$$U_6 = A^6 \times U_0.$$

On calcule A^6 avec la calculatrice puis U_6 .

On obtient en arrondissant à 10^{-2} près.

$$U_6 = \begin{pmatrix} 1882353,20 \\ 96,47 \end{pmatrix}$$

Au 1^{er} juillet 2018, le nombre de campagnols sera de 1 882 353 et le nombre de renards 96.

Remarque

Il est nécessaire pour effectuer les calculs d'avoir un nombre suffisant de décimales.

Car si on prend 4 décimales ou moins alors le coefficient 2×10^{-5} devient **0**.

Pour information nous avons effectué les calculs avec 15 décimales.

2.a. On admet que :

$$A = P \times D \times P^{-1} \text{ et } P \times P^{-1} = P^{-1} \times P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et que pour tout entier naturel } n : U_n = A^n \times U_0.$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

Initialisation

Pour $n=0$, on a : $A^0 = I$ et $D^0 = I$ donc $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I$

On obtient : $A^0 = P \times D^0 \times P^{-1}$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1} \text{ et on doit démontrer que : } A^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}.$$

$$\text{Or } A^{n+1} = A^n \times A = (P \times D^n \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) = P \times D^n \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1} = P \times D^n \times D \times P^{-1}$$

$$A^{n+1} = P \times D^n \times D \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Conséquence

Pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n \times U_0 = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0.$$

2.b. La matrice D est diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \quad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$$

2.c. Pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15}$.

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = \frac{2 \times 10^6}{15} \times 0,7^n$.

(w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = \frac{2 \times 10^6}{15} > 0$ et de raison $q = 0,7$ ($0 < 0,7 < 1$).

Donc la suite (w_n) est une suite décroissante et convergente vers 0.

Pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2,8}{15} \times 10^7 + w_n$ donc la suite (u_n) est une suite décroissante et convergente

vers $\frac{2,8}{15} \times 10^7$.

$\frac{2,8}{15} \times 10^7 = 1\,866\,667$ à l'unité près.

Conséquence

Le nombre de campagnols va diminuer d'année en année pour devenir voisin de 1 866 667.

. Pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15}$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n = \frac{400}{15} \times 0,7^n$.

(t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_0 = \frac{400}{15}$ et de raison $q = 0,7$ ($0 < 0,7 < 1$).

Donc la suite (t_n) est une suite décroissante et convergente vers 0.

Pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1400}{15} + t_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite décroissante et convergente vers $\frac{1400}{15}$.

$\frac{1400}{15} = 93$ à l'unité près.

Conséquence

Le nombre de renards va diminuer d'année en année pour devenir voisin de 93.



Exercice 8

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poissons).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année. On note, pour l'année $2017 + n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n , $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = MP_n$ où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ◦	$M := \{\{0,65,0,45\}, \{0,35,0,55\}\}$ ✓ $M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$	5 ◦	TQ → $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2 ◦	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	6 ◦	QT → $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3 ◦	$Q := \{\{9,1\}, \{7,-1\}\}$ ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	7 ◦	$D := TMQ$ → $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4 ◦	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ ✓ $T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

En s'appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- (a) Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
 - (b) Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = QD^nQ^{-1}$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.
 - (b) Justifier que, pour tout entier naturel n : $\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n$.
5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Exercice XIX.8

CORRECTION

On choisit au hasard un pêcheur et on note, pour tout entier naturel n :

L_n l'événement : « le pêcheur achète une carte de pêche libre l'année 2017+n » ;

Q_n l'événement : « le pêcheur achète une carte de pêche quota l'année 2017+n ».

On a $P(L_n)=l_n$ et $P(Q_n)=q_n$.

L'énoncé précise :

- Chaque année, 65 % des pêcheurs possédant la carte de pêche libre achètent de nouveau la carte de pêche libre l'année suivante donc 35 % des pêcheurs possédant la carte de pêche libre une année achètent la carte quota l'année suivante.

$$\text{Donc } P_{L_n}(L_{n+1})=0,65 \text{ et } P_{L_n}(Q_{n+1})=0,35.$$

- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche quota achètent la carte libre l'année suivante donc 55 % des possesseurs de la carte quota une année achètent de nouveau la carte quota l'année suivante.

$$\text{Donc } P_{Q_n}(L_{n+1})=0,45 \text{ et } P_{Q_n}(Q_{n+1})=0,55.$$

En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(L_{n+1})=P(L_n \cap L_{n+1})+P(Q_n \cap L_{n+1}) = P(L_n) \times P_{L_n}(L_{n+1}) + P(Q_n) \times P_{Q_n}(L_{n+1})$$

On obtient :

$$l_{n+1}=l_n \times 0,65 + q_n \times 0,45 = 0,65 l_n + 0,45 q_n$$

On démontre de même :

$$q_{n+1}=l_n \times 0,35 + q_n \times 0,55 = 0,35 l_n + 0,55 q_n$$

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} l_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 l_n + 0,45 q_n \\ 0,35 l_n + 0,55 q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P_{n+1}=MP_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$$

2. 2019=2017+2 donc on doit calculer q_2

$$P_1=MP_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 \times 0,4 + 0,45 \times 0,6 \\ 0,35 \times 0,4 + 0,55 \times 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 + 0,27 \\ 0,14 + 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,47 \end{pmatrix}$$

$$P_2=MP_1 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 \times 0,53 + 0,45 \times 0,47 \\ 0,35 \times 0,53 + 0,55 \times 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3445 + 0,2115 \\ 0,1855 + 0,2585 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,556 \\ 0,444 \end{pmatrix}$$

Conséquence

$$q_2 = \mathbf{0,444}.$$

$$3.a. \quad QT=TQ=I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice Q est inversible est $Q^{-1}=T$.

$$3.b. \quad QD = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5} \\ 7 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{1}{5} \\ 7 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{52}{80} & \frac{36}{80} \\ \frac{28}{80} & \frac{44}{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} = M$$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = QD^n Q^{-1}$$

Initialisation

$$\text{Pour } n=1 \quad M^1=M \text{ et } QD^1 Q^{-1}=QDQ^{-1} \text{ or } M=QDQ^{-1}.$$

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n , on suppose que :

$M^n = QD^n Q^{-1}$ et on doit démontrer que : $M^{n+1} = QD^{n+1} Q^{-1}$.

Or $M^{n+1} = MM^n = (QDQ^{-1})(QD^n Q^{-1}) = QD(Q^{-1}Q)D^n Q^{-1} = QDID^n Q^{-1} = QDD^n Q^{-1} = QD^{n+1} Q^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = QD^n Q^{-1}$$

4. On admet que pour tout entier naturel non nul n : $M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}$

4.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $P_n = M^n P_0$.

Initialisation

Pour $n=0$ $M^0 = I$ $M^0 P_0 = IP_0 = P_0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $P_n = M^n P_0$ et on doit démontrer que $P_{n+1} = M^{n+1} P_0$.

Or $P_{n+1} = MP_n = M(M^n P_0) = (MM^n) P_0 = M^{n+1} P_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $P_n = M^n P_0$.

4.b. $P_n = \begin{pmatrix} l_n \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3,6 + 2,8 \times 0,2^n + 5,5 - 5,4 \times 0,2^n \\ 2,8 - 2,8 \times 0,2^n + 4,2 + 5,4 \times 0,2^n \end{pmatrix}$

$$P_n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 - 2,6 \times 0,2^n \\ 7 + 2,6 \times 0,2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } l_n = \frac{9}{16} - \frac{2,6}{16} \times 0,2^n = \frac{9}{16} - \frac{13}{16} \times 0,2^n$$

5. Pour tout entier naturel n :

$$l_{n+1} - l_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^{n+1} - \frac{9}{16} + \frac{13}{80} \times 0,2^n = \frac{13}{80} (-0,2 + 1) \times 0,2^n = 0,8 \times \frac{13}{80} \times 0,2^n > 0$$

(l_n) est une suite strictement croissante.

$$0 < 0,2 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \frac{9}{16}$$

$$\text{donc pour tout entier naturel } n : l_n \leq \frac{9}{16} = 0,5625$$

Conclusion

La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre sera au plus égale à 56,25 % donc ne dépassera pas 60 %.

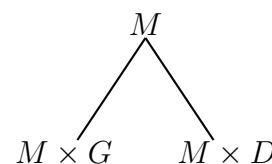
Exercice 9

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

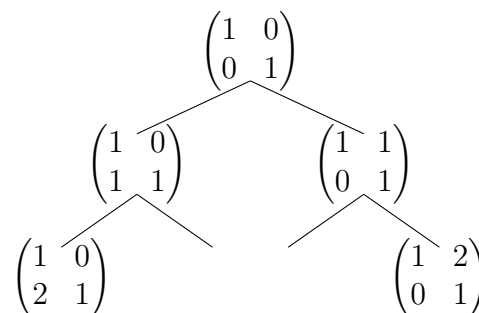
On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M .



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les deux matrices manquantes A et B_3 dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.



- On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

(a) Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

(b) En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

- Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

- Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme ci-contre :

Tant que $m \neq n$:

Si $m < n$:

Afficher « Gauche »

n prend la valeur $n - m$

Sinon :

Afficher « Droite »

n prend la valeur $m - n$

- Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage	4	...	...	...
m	7	...	...	...
n				

- Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Exercice XIX.9

CORRECTION

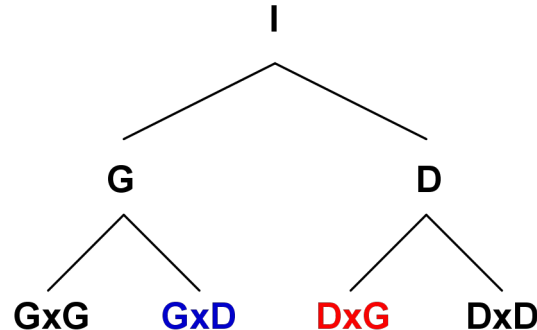
1. La matrice initiale est : $M=I$.

Les deux matrices filles de I sont : $I \times G = G$ et $I \times D = D$.

Les deux matrices filles de G sont : $G \times G$ et $G \times D$.

Les deux matrices filles de D sont : $D \times G$ et $D \times D$.

On obtient l'arbre jusqu'à la troisième ligne :



Les deux matrices demandées sont : $A = G \times D$ et $B = D \times G$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour le trajet « gauche-droite-gauche » on obtient la matrice

$$G \times D \times G = (G \times D) \times G = A \times G = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 0 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}.$$

3.a. on calcule $d(a+c) - c(b+d)$ sachant que : $ad - bc = 1$.

$$d(a+c) - c(b+d) = da + dc - cb - cd = ad - bc = 1.$$

3.b. $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Delta_M = ad - bc = 1$

$$M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times 1 + c \times 1 & a \times 0 + c \times 1 \\ b \times 1 + d \times 1 & b \times 0 + d \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{M \times G} = AD - BC = d(a+c) - c(b+d) = 1$$

On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$ et que pour toute matrice N de l'arbre de Stern-Brocot, on a : $\Delta_N = 1$.

4. Pour toute matrice $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-bocrot, on a $\Delta_N = 1$ donc $ad - bc = 1$ et

$$d(a+c) - c(b+d) = 1. \text{ La fraction associée à la matrice } N \text{ est : } \frac{a+c}{b+d}.$$

Il existe deux entiers relatifs d et $-c$ tels que $d(a+c) - c(b+d) = 1$ donc le théorème de bezout nous permet d'affirmer que les entiers naturels $(a+c)$ et $(b+d)$ sont premiers entre eux et que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5.a. On complète le tableau donné en utilisant l'algorithme.

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

5.b. Conjecture

Les entiers naturels m et n , non nuls, premiers entre eux étant donnés, l'algorithme permet de déterminer une matrice de l'arbre de Stern-Brocot dont la fraction associée est $\frac{m}{n}$.

Exemple

Pour $m=4$ et $n=7$, le trajet obtenu est : « gGuche-Droite-Gauche-Gauche », la matrice correspondante est :

$$G \times D \times G \times G = (G \times D) \times (G \times G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 & 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La fraction associée est : $\frac{3+1}{5+2} = \frac{4}{7} = \frac{m}{n}$.

Exercice 10

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n .

Lire a

A prend la valeur 0

B prend la valeur 1.

Pour i allant de 1 à n :

 C prend la valeur $A + B$

 A prend la valeur ...

 B prend la valeur ...

Fin Pour

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 , A^3 et A^5 .

Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous l'admettons, que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$$

- (b) En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q , alors r divise également a_{p+q} .

- (c) Soit p un entier naturel non nul.

Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np} .

4. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

- (b) On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$.

Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a. ?

Exercice XIX.10

1.

Solution :

```

1  A ← 0
2  B ← 1
3  Pour i allant de 1 à n :
4  |   C ← A + B
5  |   A ← B
6  |   B ← C
7  Fin Pour
    
```

2.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a.

Solution : $A^p = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix}$ et $A^q = \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix}$

$$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit, en calculant le terme de A^{p+q} situé sur la seconde ligne et première colonne que pour tous entiers naturels non nuls p et q ,

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$$

b.

Solution : si r divise a_p et a_q alors il existe deux entiers k et k' tels que $a_p = rk$ et $a_q = rk'$.

On a alors $a_{p+q} = rk \times a_{q+1} + a_{p-1} \times rk' = r(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k')$.

Or $(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k') \in \mathbb{Z}$.

Donc on en déduit que si un entier r divise les entiers a_p et a_q , alors r divise également a_{p+q}

c.

Solution :

Initialisation : pour $n = 1$

a_p divise évidemment $a_{1 \times p}$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que a_p divise a_{np} donc il existe un entier k tel que $a_{np} = k \times a_p$ alors

$$\begin{aligned} a_{(n+1)p} &= a_{np+p} = a_{np} \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p \\ &= a_p \times (k \times a_{p+1} + a_{np-1}) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Or $(k \times a_{p+1} + a_{np-1}) \in \mathbb{Z}$

On en déduit que a_p divise $a_{(n+1)p}$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$ or elle est vérifiée à ce rang 1 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p , a_p divise a_{np} .

4. a.

Solution :

Si $n \geq 5$ n'est pas premier alors il existe deux entiers naturels

$m \geq 3$ et $p \geq 2$ tels que $n = mp$ alors $a_n = a_{mp}$ est divisible par a_m d'après la question précédente.

Or pour tout entier $m \geq 3$, $a_m > 1$ donc a_n n'est pas premier car divisible par a_m qui est un entier supérieur strictement à 1

Finalement si $n \geq 5$ n'est pas premier alors a_n n'est pas premier.

b.

Solution : 4 181 n'est pas un nombre premier mais 19 est premier donc si a_n n'est pas premier, n peut l'être.

On peut conclure que la réciproque de la propriété précédente est fausse.