

Séquence XIX – Matrices (partie 2)



Exercice 1

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ u_0 = 1 ; w_0 = -1 \end{cases}$$

1. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$, justifier qu'on peut traduire ce problème sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A et X_0 des matrices à préciser.
2. Exprimer X_n en fonction de A et de n .
3. Calculer A^2 et en déduire une expression de A^n selon la parité de n .
4. En déduire une expression de X_n , puis de u_n et w_n en fonction de n .
5. Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles ?

Solution de l'exercice 1

1. On vérifie par produit matriciel que le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ u_0 = 1 ; w_0 = -1 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_2$ avec I_2 la matrice identité de taille 2. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^{2k} = 8^k I_2 = \begin{pmatrix} 2^{3k} & 0 \\ 0 & 2^{3k} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = 8^k A = \begin{pmatrix} 2 \times 8^k & 2 \times 8^k \\ 2 \times 8^k & -2 \times 8^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{3k+1} & 2^{3k+1} \\ 2^{3k+1} & -2^{3k+1} \end{pmatrix}$$

4. Pour $n = 2k$, qui est pair, on a donc $X_{2k} = \begin{pmatrix} 2^{3k} \\ -2^{3k} \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} u_{2k} = 2^{3k} \\ w_{2k} = -2^{3k} \end{cases}$

et, pour $n = 2k + 1$, qui est impair, $X_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{3k+2} \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} u_{2k+1} = 0 \\ w_{2k+1} = 2^{3k+2} \end{cases}$

5. Les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc divergentes.



Exercice 2

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}w_n \\ u_0 = 10; w_0 = 20 \end{cases}$$

1. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$, justifier qu'on peut écrire ce problème sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A et X_0 des matrices à préciser.
2. Exprimer X_n en fonction de A et de n .
3. Calculer A^2 et en déduire une expression de A^n selon la parité de n .
4. En déduire une expression de X_n , puis de u_n et w_n en fonction de n .
5. Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles ?

Solution de l'exercice 2

1. On vérifie par produit matriciel que le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}w_n \\ u_0 = 10; w_0 = 20 \end{cases}$$

s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

$$3. A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_2 \text{ avec } I_2 \text{ la matrice identité de dimension 2. On a donc, pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$$A^{2k} = \frac{1}{2^k}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = \frac{1}{2^k}A = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{2^k} & 2 \times \frac{1}{2^k} \\ 2 \times \frac{1}{2^k} & -2 \times \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k-1}} & \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^{k-1}} & -\frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Pour } n = 2k, \text{ on a donc } X_{2k} = \begin{pmatrix} 10 \times \frac{1}{2^k} \\ 20 \times \frac{1}{2^k} \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } \begin{cases} u_{2k} = 10 \times \frac{1}{2^k} \\ w_{2k} = 20 \times \frac{1}{2^k} \end{cases}$$

$$\text{et pour } n = 2k + 1, X_{2k+1} = \begin{pmatrix} 30 \times \frac{1}{2^{k-1}} \\ -10 \times \frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } \begin{cases} u_{2k+1} = 30 \times \frac{1}{2^{k-1}} \\ w_{2k+1} = -10 \times \frac{1}{2^{k-1}} \end{cases}$$

5. Les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.



Exercice 3

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver la matrice A telle que $x_{n+1} = Ax_n$.

En déduire que $x_n = A^n x_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p > 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} N + 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Solution de l'exercice 3

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul matriciel donne que $x_{n+1} = Ax_n$, et par récurrence, on en déduit que $x_n = A^n x_0$.

2. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $p > 3$, on a alors $N^p = N^3 \times N^{p-3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

3. Écrivons que $A = 3I + N$ et remarquons que les matrices $3I$ et N commutent. La formule du binôme, puisque $N^p = O_3$ dès que $p > 3$, permet d'obtenir le résultat demandé. (il est également possible de procéder par récurrence).
4. On obtient alors :

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n &= 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n &= 7 \times 3^n \end{aligned}$$

Exercice 4

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population, d'une année sur l'autre, varie donc en fonction

- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction)
- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction

- du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction)
- du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement g_n et b_n le nombre de gardons et de brochets, au 1^{er} janvier de l'année 2021 + n .

Partie 1.

Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites (g_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v_n le vecteur $v_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation lie v_n , v_{n+1} et A ? En déduire une relation entre v_n , A et v_0 .
2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .
4. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous?

Partie 2.

Pour enrayer l'extinction des espèces, on décide de relâcher chaque année 30 gardons dans l'étang.

Dans cette deuxième modélisation, les deux suites (g_n) et (b_n) vérifient donc maintenant les relations

$$\begin{cases} g_{n+1} = 1,1g_n - 0,2b_n + 30 \\ b_{n+1} = 0,4g_n + 0,5b_n \end{cases}$$

de sorte que, en gardant les mêmes notations, on a $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse.
2. On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$.
4. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0 . On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n) .
5. Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas? Interpréter...

Cet exercice est inspiré de travaux réels réalisées à la fin du XIX^{ème} siècle par deux spécialistes de la dynamique des populations : l'italien Vito Volterra et de l'américain James Lotka.

Solution de l'exercice 4

Partie 1.

1. On a $v_{n+1} = Av_n$. Par récurrence, on en déduit que $v_n = A^n v_0$.
2. $\det(P) = 1 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On a $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.
4. Par récurrence, ou parce qu'on connaît la formule pour les puissances de matrices diagonales, on obtient

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$$

5. On part de la relation $D = P^{-1}AP$. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on trouve que $A = PDP^{-1}$. On démontre alors la relation par récurrence. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors
 - Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$.
 - Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

6. On trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2 \times 0,9^n - 2 \times 0,7^n & -0,9^n + 2 \times 0,7^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g_n &= (2 \times 0,9^n - 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 0,7^n) \times 100 \\ b_n &= (2 \times 0,9^n - 2 \times 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 2 \times 0,7^n) \times 100 \end{aligned}$$

Puisque les suites $(0,9^n)$ et $(0,7^n)$ tendent vers 0, on en déduit que les suites (g_n) et (b_n) tendent toutes deux vers 0. Les espèces vont s'éteindre !

Partie 2.

1. On vérifie que $(A - I_2)$ est inversible et que

$$(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{40}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

2. On obtient $C = (A - I_2)^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}$.
3. Par exemple, la première ligne de V_{n+1} est $g_{n+1} - 500 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$
et la première ligne de Av_n est $1,1g_n - 1,1 \times 500 - 0,2b_n + 0,2 \times 400 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$.
4. Comme dans la partie 1, on a $v_n = A^n v_0$ et les suites (x_n) et (y_n) tendent vers 0.
5. Puisque $g_n = x_n + 500$, la suite (g_n) tend vers 500. De même, la suite (b_n) tend vers 400. Il suffit donc d'introduire 30 gardons chaque année pour arriver à des populations d'équilibre de 500 gardons et 400 brochets... surprenant !

Exercice 5

Le gestionnaire d'un site web désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web. Ce site est composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes. Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira soit sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ soit il restera sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°3, alors, soit il ira sur la page n°1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n , on définit les événements et les probabilités suivants :

A_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°1 » et on note $a_n = P(A_n)$.

B_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°2 » et on note $b_n = P(B_n)$.

C_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n°3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

Ainsi

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. $U_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ représente la situation initiale, où $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n , n étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n , b_n et c_n en fonction de n . En déduire que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

Solution de l'exercice 5

1. D'après les probabilités données, pour passer à la page 1 au $(n+1)$ -ième clic, il faut être soit sur la page 2 (probabilité b_n) et aller vers la page 1 (probabilité $\frac{1}{2}$), soit être sur la page 3 (probabilité c_n) et aller vers la page 1 (probabilité $\frac{1}{2}$).

$$\text{Donc : } a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

2. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on obtient $U_n = M^n U_0$.

3. Il faut résoudre $MU = U$, soit $(M - I)U = 0$ avec $x + y + z = 1$.

Le système donne : $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4. En utilisant l'expression de M^n et U_0 , on obtient les expressions de a_n , b_n et c_n .

Les limites sont

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \frac{2}{5} & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \frac{1}{5} & \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Exercice 6

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte.
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte.

On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

(a) Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

(b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

(c) En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admettra sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

2. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

(b) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale notée D que l'on précisera.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1 - 0,7^n}{3} \\ \frac{2 - 2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2 + 0,7^n}{3} \end{pmatrix}$$

4. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

Solution de l'exercice 6

1. (a) $a_1 = 0,8 \times 0,5 + 0,1 \times 0,5 = 0,45$ et $b_1 = 0,2 \times 0,5 + 0,9 \times 0,5 = 0,55$.

(b) $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,1b_n$ et $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,9b_n$.

(c) $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

2. $U_3 = M^3 U_0$. En calculant, on trouve la répartition au bout de 3 jours.

3. (a) $P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

(c) Par diagonalisation : $M^n = P D^n P^{-1}$.

4. $-1 < 0,7 < 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$, donc la répartition tend vers $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.

Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année 2012 + n .

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} &= 2 \times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \text{ pour tout entier } n \geq 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. (a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0 .

- (b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{15000} \begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.
(b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n .
(c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n = \frac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Exercice 8

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poissons).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année. On note, pour l'année $2017 + n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0,4$ et $q_0 = 0,6$.

On note, pour tout entier naturel n , $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = MP_n$ où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ◦	$M := \{\{0,65,0,45\}, \{0,35,0,55\}\}$ ✓ $M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$	5 ◦	TQ → $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2 ◦	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$	6 ◦	QT → $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3 ◦	$Q := \{\{9,1\}, \{7,-1\}\}$ ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	7 ◦	$D := TMQ$ → $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
4 ◦	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ ✓ $T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$		

En s'appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- (a) Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
 - (b) Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = QD^nQ^{-1}$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.
 - (b) Justifier que, pour tout entier naturel n : $\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n$.
5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Solution de l'exercice 8

1. D'après les transitions données :

$$\ell_{n+1} = 0,65\ell_n + 0,45q_n$$

$$q_{n+1} = 0,35\ell_n + 0,55q_n$$

Donc $P_{n+1} = MP_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.

2. En 2019, on a $n = 2$, donc $P_2 = M^2P_0$. En calculant, on trouve la proportion de pêcheurs avec quota.
3. (a) Le déterminant de Q est non nul, donc Q est inversible. Sa matrice inverse est donnée dans les résultats.
(b) On vérifie que $M = QDQ^{-1}$ par calcul matriciel. Par récurrence, $M^n = QD^nQ^{-1}$.
4. (a) Par récurrence : $P_n = M^nP_0$.
(b) En utilisant l'expression de M^n et $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$, on obtient la formule demandée.
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{9}{16} = 0,5625 = 56,25 \% < 60 \%$. Non, la proportion ne dépassera jamais 60 %.

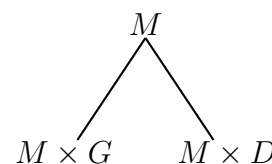
Exercice 9

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

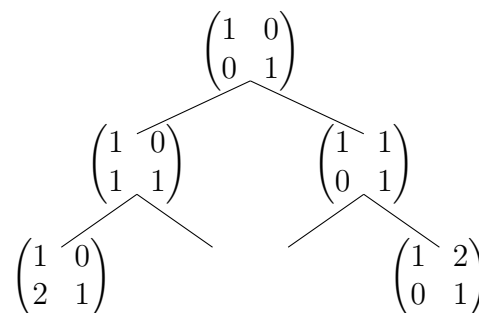
On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M .



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les deux matrices manquantes A et B_3 dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.



- On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

(a) Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

(b) En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

- Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

- Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme ci-contre :

Tant que $m \neq n$:

Si $m < n$:

Afficher « Gauche »

n prend la valeur $n - m$

Sinon :

Afficher « Droite »

n prend la valeur $m - n$

- Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		4	...	...	...
m		7	...	...	...
n					

- Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Solution de l'exercice 9

1. En partant de I et en appliquant les règles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le trajet « gauche-droite-gauche » donne : $I \times G \times D \times G$.

$$\begin{aligned} I \times G \times D \times G &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La fraction associée est $\frac{2+3}{1+2} = \frac{5}{3}$. **ERREUR : A REVOIR**

3. (a) Si $ad - bc = 1$, alors en développant

$$\begin{aligned} d(a+c) - c(b+d) &= da + dc - cb - cd \\ &= da - cb \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) $M \times G = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \Delta_{M \times G} &= (a+c)d - c(b+d) \\ &= ad + cd - cb - cd \\ &= ad - bc \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Si $\Delta_M = 1$ pour toute matrice M , alors pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $ad - bc = 1$, donc $\text{pgcd}(a+c; b+d) = 1$.

La fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5. (a) Tableau complété :

Affichage		Gauche	Gauche	Droite
m	4	4	4	1
n	7	3	3	3

L'algorithme affiche : « Gauche », « Gauche », « Droite ».

- (b) L'algorithme semble déterminer le chemin dans l'arbre de Stern-Brocot pour atteindre la fraction $\frac{m}{n}$.

La vérification matricielle confirme ce résultat.

Exercice 10

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n .

Lire a

A prend la valeur 0

B prend la valeur 1.

Pour i allant de 1 à n :

 C prend la valeur $A + B$

 A prend la valeur ...

 B prend la valeur ...

Fin Pour

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 , A^3 et A^5 .

Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous l'admettons, que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$$

- (b) En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q , alors r divise également a_{p+q} .

- (c) Soit p un entier naturel non nul.

Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np} .

4. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

- (b) On peut calculer $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$.

Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a. ?

Solution de l'exercice 10

1. L'algorithme complété :

6 $A \leftarrow B$

7 $B \leftarrow C$

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (a)

$$\begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}$$

$A^p \times A^q = A^{p+q}$, ce qui donne la relation demandée.

(b) Si r divise a_p et a_q , alors r divise $a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q = a_{p+q}$.

(c) Par récurrence sur n : si a_p divise a_{kp} , alors a_p divise aussi $a_{(k+1)p}$.

4. (a) Si $n = rs$ avec $r, s > 1$, alors a_r divise a_n , donc a_n n'est pas premier.

(b) La réciproque est fausse : a_{19} n'est pas premier bien que 19 soit premier.