

Matrices (partie 2)

1. Suites récurrentes

Différents types de suites définies par des relations de récurrence se ramènent à l'étude d'une suite de matrices colonnes (M_n) vérifiant une relation de récurrence du type $M_{n+1} = A \times M_n + B$, où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

A. Cas où B est la matrice nulle

■ PROPRIÉTÉ :

Si une suite de matrices colonnes (M_n) vérifie une relation de récurrence du type $M_{n+1} = A \times M_n$, où A est une matrice carrée, alors pour tout entier naturel n , $M_n = A^n \times M_0$, où M_0 est le premier terme de la suite.

Exemple : Suites récurrentes d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 0,4u_{n+1} + 0,6u_n$.

On définit la matrice colonne $M_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la relation ci-dessus s'écrit alors

$$M_{n+1} = A \times M_n$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 0,4u_{n+1} + 0,6u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $M_{n+1} = A \times M_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

2. Conjecturer avec la calculatrice la limite de A^n lorsque n tend vers l'infini, et la limite de (u_n) .

On conjecture que la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on conjecture que la limite de la suite (M_n) est $\begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \times M_0$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,625 \end{pmatrix}$, donc on conjecture que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,625$$

■ DÉFINITION :

La suite de matrices (M_n) telle que $M_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, converge lorsque les suites (u_n) et (v_n) convergent. Plus généralement, on dit que la suite de matrices colonnes (M_n) de taille p est **convergente** lorsque les p suites formées par les termes correspondant à la même ligne convergent.

■ PROPRIÉTÉ :

Avec les mêmes notation que précédemment, la limite de la suite (M_n) est la matrice colonne formée des p limites obtenues.

B. Cas général

■ PROPRIÉTÉ :

Si une suite de matrices colonnes (M_n) vérifiant une relation de récurrence du type

$$M_{n+1} = A \times M_n + B$$

converge, alors sa limite X est une matrice colonne vérifiant l'égalité : $M = A \times M + B$

Soit I la matrice identité de même taille que la matrice carrée A .

Si la matrice $I - A$ est inversible, alors pour toute matrice colonne B (de même taille que A), il existe une unique matrice M telle que $M = A \times M + B$.

En effet, cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned} M - A \times M &= B \text{ i.e. } I \times M - A \times M = B \\ \text{i.e. } (I - A) \times M &= B \\ \text{i.e. } M &= (I - A)^{-1} \times B \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si une suite de matrices colonnes (M_n) vérifiant une relation de récurrence du type

$$M_{n+1} = A \times M_n + B$$

converge, alors sa limite M ne dépend pas du premier terme M_0 .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Si la matrice $I - A$ n'est pas inversible, alors on admettra que :

- soit il n'existe aucune matrice-colonne M vérifiant $M = A \times M + B$ et la suite (M_n) ne peut être convergente.
- soit il existe une infinité de matrices colonnes M vérifiant $M = A \times M + B$ dont l'une est éventuellement la limite de la suite (M_n) .

Exemple : Suites à récurrences simultanées

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,6u_n - 0,2v_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,3u_n - 0,3v_n + 4 \end{cases}$$

- Soit $M_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il existe une matrice carrée A d'ordre 2 et une matrice colonne B telles que les relations de récurrence ci-dessus s'écrivent

$$\text{pour tout entier naturel } n, \\ M_{n+1} = A \times M_n + B$$

Écrivons la relation de récurrence sous forme matricielle :

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6u_n - 0,2v_n + 1 \\ 0,3u_n - 0,3v_n + 4 \end{pmatrix}$$

On peut réécrire cette expression ainsi :

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6u_n - 0,2v_n \\ 0,3u_n - 0,3v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 0,6u_n - 0,2v_n \\ 0,3u_n - 0,3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

On en conclut que

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} M_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- On admet la convergence des suites (u_n) et (v_n) . Déterminer leurs limites.

Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$$

En passant à la limite dans la relation

$$M_{n+1} = AM_n + B$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} + B$$

Cela donne le système :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} \ell_1 = 0,6\ell_1 - 0,2\ell_2 + 1 \\ \ell_2 = 0,3\ell_1 - 0,3\ell_2 + 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \ell_1 - 0,6\ell_1 + 0,2\ell_2 = 1 \\ \ell_2 - 0,3\ell_1 + 0,3\ell_2 = 4 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} 0,4\ell_1 + 0,2\ell_2 = 1 \\ -0,3\ell_1 + 1,3\ell_2 = 4 \end{cases}$$

On résout le système :

La première équation est $0,4\ell_1 + 0,2\ell_2 = 1$

Multiplions par 5 : $2\ell_1 + \ell_2 = 5$

On obtient : $\ell_2 = 5 - 2\ell_1$ (*)

La deuxième équation est $-0,3\ell_1 + 1,3\ell_2 = 4$

Multiplions par 10 : $-3\ell_1 + 13\ell_2 = 40$ (**)

Substituons (*) dans (**) :

$$-3\ell_1 + 13(5 - 2\ell_1) = 40$$

$$\text{i.e. } -3\ell_1 + 65 - 26\ell_1 = 40$$

$$\text{i.e. } -29\ell_1 = 40 - 65 = -25$$

$$\text{Donc } \ell_1 = \frac{25}{29}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \ell_2 &= 5 - 2 \times \frac{25}{29} \\ &= 5 - \frac{50}{29} \\ &= \frac{145 - 50}{29} \\ &= \frac{95}{29} \end{aligned}$$

On en conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{25}{29} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{95}{29}$$

2. Marche aléatoire, matrices de transition

■ DÉFINITION :

On considère la variable aléatoire M_n prenant les valeurs A ou B à l'étape n .

A et B s'appellent les **états** de M_n .

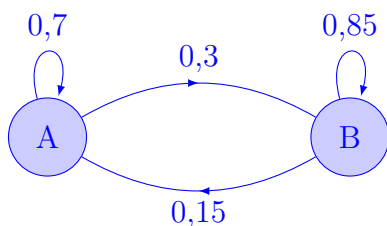
Exemple :

Une entreprise de location de voitures propose de louer des voitures à la journée.

Elle possède deux agences A et B dans lesquelles un client peut indifféremment déposer en fin de journée le véhicule loué le matin.

On constate que : 70 % des voitures qui ont été louées à l'agence A le matin sont rendues en A , les autres étant restituées à l'agence B , et 85 % des voitures louées à l'agence B sont restituées en B , les autres étant déposées en A .

Les données de l'énoncé peuvent être traduire par le schéma ci-dessous, appelé **graphe**. Les points A et B sont appelés **sommets du graphe**.



Ici, $M_3 = B$ signifie que la voiture est dans l'agence B à la fin de la troisième journée.

■ DÉFINITION :

La suite de variables aléatoires (M_n) est appelée **marche aléatoire** sur l'ensemble des issues $\{A, B\}$, c'est-à-dire : l'état du processus à l'étape $n + 1$ ne dépend que de celui à l'état n , mais non de ses états antérieurs.

■ DÉFINITION :

Dans le cas d'une marche aléatoire à p états, on appelle **matrice de transition** des états, la matrice carrée d'ordre p dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet i vers le sommet j , ou encore la probabilité d'arriver en j sachant qu'on est parti de i .

Exemple :

La matrice de transition associée à un graphe à deux états est donc la matrice T :

	vers A	vers B
de A →	$p_A(A)$	$p_A(B)$
de B →	$p_B(A)$	$p_B(B)$

Remarque : Les probabilités de transition du premier sommet vers chacun des sommets du graphe constituent la première ligne de la matrice, les probabilités de transition du deuxième sommet vers chacun des sommets du graphe constituent la deuxième ligne, etc.

■ DÉFINITION :

La somme des coefficients de chaque ligne est donc égale à 1 : on dit que la matrice T est une matrice **stochastique** selon les lignes.

Exemple : (suite de l'exemple précédent)

La matrice de transition T du graphe précédent est :

$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = U_n \times T \text{ et } U_n = U_0 \times T^n.$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si une marche aléatoire à p états, de matrice de transition T , converge, alors la suite (U_n) converge vers U vérifiant $U \times T = U$.

Exemple : (suite de l'exemple précédent)

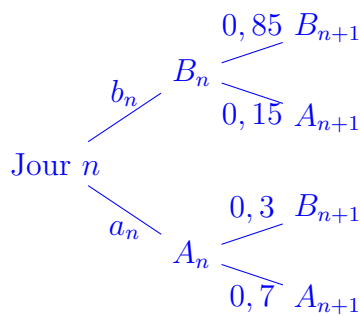
On choisit au hasard un véhicule dans cette flotte de voitures et on suit ses déplacements au cours du temps. Pour tout n entier naturel, on notera M_n la variable aléatoire donnant l'état du véhicule à la fin de la n -ième journée.

L'état A (respectivement B) étant « le véhicule est dans l'agence A (respectivement B) ». Pour tout n , on représente par $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la loi de probabilité de M_n .

La loi de probabilité initiale (c'est-à-dire représentant la répartition initiale des véhicules entre les agences A et B) est donnée par

$$U_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$$

On note A_n (respectivement B_n) l'événement : « la n -ième journée, le véhicule est dans l'agence A (respectivement B) ». On a donc $A_n = \{M = a_n\}$ et $p(A_n) = a_n$. Faire un arbre pondéré faisant apparaître les événements A_n, B_n, A_{n+1} et B_{n+1} .



En déduire un système permettant d'exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

D'après l'arbre pondéré :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7 \times a_n + 0,15 \times b_n \\ b_{n+1} = 0,3 \times a_n + 0,85 \times b_n \end{cases}$$

Vérifier que ce système peut s'écrire sous la forme $U_{n+1} = U_n \times T$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_n \times T &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,15b_n & 0,3a_n + 0,85b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

On suppose que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer U_1 et U_2 . Que peut-on dire de U_n ?

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 \times T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 0,7 + \frac{2}{3} \times 0,15 & \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{2}{3} \times 0,85 \\ \frac{7}{30} + \frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{17}{30} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = U_0 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0$, c'est un état stationnaire.

On suppose que $U_0 = (0,75 \quad 0,25)$.

Donner, grâce à la calculatrice, les valeurs approchées de U_7 , U_{14} et U_{28} .

$$\begin{aligned} U_7 &\approx (0,334 \quad 0,666) \\ U_{14} &\approx (0,333 \quad 0,667) \\ U_{28} &\approx (0,333 \quad 0,667) \end{aligned}$$

Toujours à l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement des suites (a_n) et (b_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}$$

À long terme, la répartition des véhicules tend vers un état d'équilibre dans lequel $\frac{1}{3}$ des véhicules sont à l'agence A et $\frac{2}{3}$ à l'agence B.

Mêmes questions qu'au 2) avec $U_0 = (0,4 \quad 0,6)$ puis $U_0 = (0,9 \quad 0,1)$.

Quelle conjecture peut-on émettre ?

Pour $U_0 = (0,4 \quad 0,6)$ et $U_0 = (0,9 \quad 0,1)$, on observe que les suites convergent vers les mêmes limites : $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Conjecture : Quelle que soit la distribution initiale, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ respectivement.

Démonstration de cette conjecture :

Connaître l'expression de a_n et b_n permettrait de déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n) .

On a vu que pour tout n , $U_n = U_0 \times T^n$.

Il faut donc calculer T^n , ce qui peut se révéler compliqué. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 1 & -0,15 \end{pmatrix}$.

Justifier que S est inversible et calculer

$D = S^{-1} \times T \times S$. Que peut-on dire de D ?

$$\begin{aligned} \det(S) &= 1 \times (-0,15) - 0,3 \times 1 \\ &= -0,15 - 0,3 \\ &= -0,45 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

donc S est inversible.

$$S^{-1} = \frac{1}{-0,45} \begin{pmatrix} -0,15 & -0,3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{20}{9} & -\frac{20}{9} \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1} \times T \times S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale.

Calculer D^n .

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,55^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,55^n \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$T^n = S \times D^n \times S^{-1}$$

Raisonnons par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$: $T = S \times D \times S^{-1}$ par définition de D
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$T^k = S \times D^k \times S^{-1}$$

, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} T^{k+1} &= T \times T^k \\ &= (S \times D \times S^{-1}) \times (S \times D^k \times S^{-1}) \\ &= S \times D^{k+1} \times S^{-1} \end{aligned}$$

On a montré que la propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, T^n = S \times D^n \times S^{-1}$$

En déduire les coefficients de T^n puis les limites des suites (a_n) et (b_n) .

$$\begin{aligned} T^n &= S \times D^n \times S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 1 & -0,15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,55^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{20}{9} & -\frac{20}{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,55^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,55^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,55^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,55^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$-1 < 0,55 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,55^n = 0$, donc

$$T^n \text{ tend vers } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}.$$

Remarque : Il reste un mystère... Comment a été trouvé la matrice S ? Vous découvrirez cela après le bac...