

- 2) Écrire une fonction $U(a, n)$ en Python  donnant les populations, en milliers d'individus, des états A et B en fonction de a_0 et n .
Que renvoie la fonction pour $(375, 30)$, $(50, 30)$, $(500, 30)$?
Conjecturer l'évolution des populations a_n et b_n sur le long terme.
- 3) a) Traduire le système de la question 1) à l'aide d'une suite (U_n) de matrices colonnes. En déduire U_n en fonction n et de U_0 correspondant à l'état initial.
- b) $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + 0,75^n & 4 - 4 \times 0,75^n \\ 1 - 0,75^n & 1 + 4 \times 0,75^n \end{pmatrix}$ par une diagonalisation.
- Exprimer a_n et b_n en fonction de n et de a_0 . Conclure.

EXERCICE 19

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note j_n et a_n les nombres d'animaux jeunes et adultes après n années d'observation.

On compte la première année, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que :
$$\begin{cases} j_{n+1} = 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} = 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{cases}$$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = AU_n$.
b) Calculer U_1 et U_2 . Les résultats seront arrondis à l'unité près par défaut.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0 .
- 2) Soit $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Montrer que Q est inversible et calculer Q^{-1} .
b) Montrer que : $A = QDQ^{-1}$.
c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.
- 3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7(-0,25)^n & 0,42 - 0,42(-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5(-0,25)^n & 0,7 + 0,3(-0,25)^n \end{pmatrix}$.
b) En déduire j_n et a_n en fonction de n .
c) Déterminer les limites de (j_n) et (a_n) .
d) Que peut-on en conclure quant à la population d'animaux étudiée?

EXERCICE 20

Un opérateur A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 000 abonnés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les nombres d'abonnés, en milliers, des opérateurs A et la n -ième année après 2013. Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.