
EXERCICE 5 - Recrutement

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k -ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X .
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^n x^k$, calculer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X .
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats?

Correction :

1. Notons Ω l'univers associé à l'expérience.
On a bien sûr $X(\Omega) = \{1, \dots, n + 1\}$. Pour $i = 1, \dots, n$, on note A_i l'événement : le i -ème candidat réussit le test. Pour $k \leq n$, on a

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

Par la formule des probabilités composées, on trouve

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) \dots \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$$

Mais pour tout j , $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j})$ est juste la probabilité que le candidat échoue au test (qu'il ne passe que si les candidats précédents ont tous échoué). Cette probabilité vaut donc $q = 1 - p$. Finalement, on trouve donc $P(X = k) = q^{k-1}p$. D'autre part, $\mathbb{P}(X = n + 1)$ est la probabilité que tous les candidats échouent au test. On a donc $\mathbb{P}(X = n + 1) = q^n$.

2. Posons $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En dérivant des deux côtés de l'égalité, on obtient $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$. L'espérance de X vaut donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n kq^{k-1}p + (n+1)q^n$$

En tenant compte de la remarque introductive, et après simplifications, on trouve

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3. Un des candidats est recruté si et seulement si l'événement $X \leq n$ est réalisé. Il vient $\mathbb{P}(X \leq n) = 1 - P(X = n + 1) = 1 - q^n$.
On a

$$P(X \leq n) \geq 1/2 \iff q^n \leq \frac{1}{2} \iff p \geq 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$