

Exercice 1 : Révisions de probabilités + fonctions

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égal à p .

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Lucien fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si Lucien est contrôlé au i^{e} trajet et la valeur 0 sinon.

Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40}$.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.
 - a) Calculer l'espérance mathématique de X .
 - b) Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
Calculer la probabilité pour que Lucien soit contrôlé au plus deux fois. *arrondir à 10^{-4} .*
- 3) Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
 - a) Déterminer l'expression de Z en fonction de X .
 - b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire Z pour $p = \frac{1}{5}$.
 - c) Donner une interprétation de cette espérance.
- 4) On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Lucien subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 0,99.
 - a) Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38} (741p^2 + 38p + 1)$.
 - b) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = (1-x)^{38} (741x^2 + 38x + 1)$.
 - i) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; 1]$.
 - ii) Montrer qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$.
 - iii) Déterminer l'entier naturel n tel que $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$.
 - c) En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Lucien subisse au moins trois contrôle soit supérieure ou égale à 0,99 (*vous exprimerez p en fonction de x_0*).

Exercice 1 :

1) Lucien effectue 40 trajets identiques au sens où il a la même probabilité de se faire contrôler à chaque trajet et que la probabilité de contrôle est toujours la même.

Chaque trajet est donc une épreuve de Bernoulli de probabilité p et les 40 trajets constituent un schéma de Bernoulli car ils sont deux à deux indépendants.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et p .

2) $p = \frac{1}{20}$

a) $E(X) = np = 40 \cdot \frac{1}{20} = 2$

b) $P(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{40} = 0,95^{40} (\approx 0,1285)$

$$P(X = 1) = \binom{40}{1} \frac{1}{20} \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{39} = \frac{40}{20} \times 0,95^{39} = 2 \times 0,95^{39} (\approx 0,2706)$$

$$P(X = 2) = \binom{40}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{38} = \frac{39 \times 40}{2} \times 0,05^2 \times 0,95^{38} = 780 \times 0,05^2 \times 0,95^{38} (\approx 0,2777)$$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,6767$

3) a) $Z = 10.40 - 100X = 400 - 100X$

b) L'espérance est linéaire donc, pour $p = \frac{1}{5}$, on a :

$$E(Z) = E(400 - 100X) = 400 - 100E(X) = 400 - 100.40 \cdot \frac{1}{5} = 400 - 800 = -400$$

c) Cela signifie que sur un grand nombre de mois, si $p = \frac{1}{5}$, Lucien perd en moyenne 400 € en fraudant systématiquement sur ses 40 trajets.

4) a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$P(X \leq 2) = (1 - p)^{40} + \binom{40}{1} (1 - p)^{39} p + \binom{40}{2} (1 - p)^{38} p^2$$

$$P(X \leq 2) = (1 - p)^{38} ((1 - p)^2 + 40(1 - p)p + 39 \times 20p^2)$$

$$P(X \leq 2) = (1 - p)^{38} (p^2 - 2p + 1 + 40p - 40p^2 + 780p^2)$$

$$P(X \leq 2) = (1 - p)^{38} (741p^2 + 38p + 1)$$

b) $\forall x \in [0; 1], f'(x) = \dots = -29640(1 - x)^{37} x^2$

Donc $\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$

Et f décroît strictement sur $[0; 1]$.

f est une fonction strictement décroissante et continue (polynômiale) sur $[0; 1]$.

De plus $f(x) = 1$ et $f(1) = 0$, donc $0,01 \in [f(1); f(0)]$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0,01$ admet donc une unique solution x_0 sur $[0; 1]$.

D'après la calculatrice $f\left(\frac{19}{100}\right) > 0$ et $f\left(\frac{20}{100}\right) < 0$ donc $n = 19$ et $\frac{19}{100} \leq x_0 \leq \frac{20}{100}$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - f(x)$

Donc $P(X \geq 3) \geq 0,99 \Leftrightarrow f(p) \leq 0,01 \Leftrightarrow f(p) \leq f(x_0)$

Or f décroît donc $p \geq x_0$.