

Exercice d'approfondissement – probabilités – loi binomiale

★ **29** Une personne appelle successivement trois correspondants. On admet que chaque appel est indépendant du précédent et que, quel que soit le correspondant appelé, la probabilité de l'obtenir est p , ($0 < p < 1$), et celle de ne pas l'obtenir est $q = 1 - p$.

1. X est la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de correspondants obtenus au cours de ces trois appels. Déterminez la loi de X .

2. Après ces trois appels, la personne procède dans les mêmes conditions à un second appel des correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On désigne par Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels. Déterminez la loi de Y .

3. On désigne par Z le nombre total de correspondants obtenus après ces deux séries d'appels.

Alors $Z = X + Y$.

a) Démontrez que Z suit une loi binomiale de paramètres $3, 1 - q^2$.

b) On suppose que $p = \frac{1}{3}$. Calculez $E(X)$, $E(Y)$, $E(Z)$.

c) Déterminez une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la valeur minimale de p telle que :

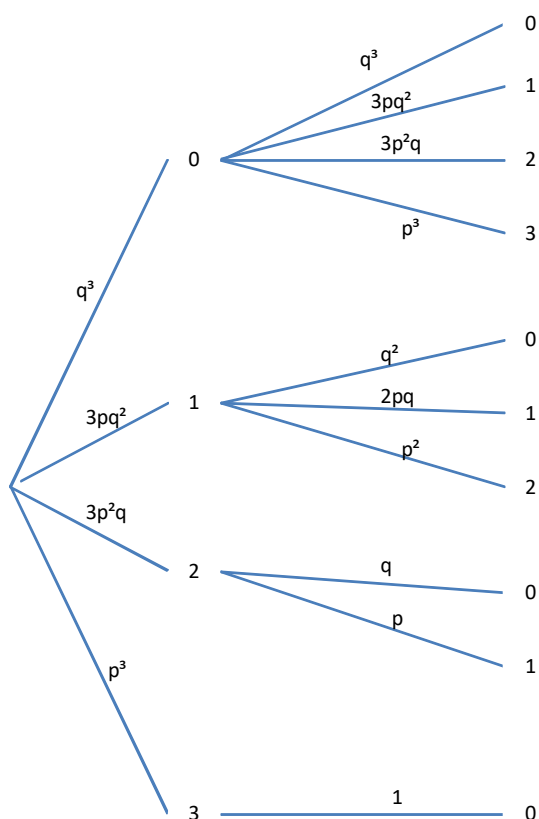
$$p(Z = 3) > 0,5.$$

Ex.29 :

1. X suit une loi binomiale de paramètres 3 et p car chaque appel a la même probabilité d'aboutir et chaque appel est indépendant des autres.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

2. On peut raisonner sur un arbre avec le 1^{er} appel suivi du 2^e :



k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$q^6 + 3pq^4 + 3p^2q^2 + p^3$	$3pq^5 + 5p^2q^4 + 3p^2q^2$	$3q^4p^2 + 3p^3q^2$	q^3p^3

3. a) On lit la loi de Z sur l'arbre en additionnant les valeurs des 1ères et 2èmes branches :

k	0	1	2	3
P(Z=k)	q^6	$3pq^5 + 3pq^4$	$3p^2q^4 + 6p^2q^3 + 3p^2q^2$	$q^3p^3 + 3p^3q^2 + 3p^3q + p^3$

Après avoir calcul, on trouve :

k	0	1	2	3
P(Z=k)	$q^6 = q^{2^3}$	$3(1-q)q^5 + 3(1-q)q^4$ $= 3q^4 - 3q^6$ $= 3(1-q^2)q^4$	$3p^2q^4 + 6p^2q^3 + 3p^2q^2$ $= 3p^2q^2(q^2 + 2q + 1)$ $= 3(1-q)^2q^2(1+q)^2$ $= 3(1-q^2)^2q^2$	$(q^3 + 3q^2 + 3q + 1)p^3$ $= (1+q)^3p^3$ $= (1+q)^3p(1-q)^3$ $= (1-q^2)^3$

On constate donc bien que Z suit une loi binomiale $B(3, 1 - q^2)$

car $(Z = k) = \binom{3}{k} (1 - q^2)^k q^{2^{3-k}}$.

Autre Raisonnement plus élégant :

Pour chacune des trois personnes, on considère la variable aléatoire Z_i qui vaut 1 si la personne a répondu au moins une fois sur les deux tentatives (succès) et 0 si elle n'a jamais répondu (échec). (i prend les valeurs 1, 2 et 3).

Chaque variable aléatoire Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^2$ car $p(Z_i = 0) = q \times q = q^2$.

Chaque Z_i est indépendante des deux autres.

On a $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ donc Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3; 1 - q^2)$

3.b) Si $p = \frac{1}{3}$, alors $E(X) = np = 1$,

$$E(Z) = 3 \times (1 - q^2) = 3 \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{3}$$

$$E(Y) = E(Z - X) = E(Z) - E(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \quad \text{car l'espérance est linéaire.}$$

$$3.c) P(Z = 3) > 0,5 \Leftrightarrow (1 - q^2)^3 > 0,5 \Leftrightarrow q^2 < 1 - \sqrt[3]{0,5}$$

$$\Leftrightarrow q < \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}} \quad \text{donc } q < 0,45 \text{ et } p > 0,55 \text{ valeur minimale par excès.}$$