

Révisions – probabilités et suites

Exercice 1

Un agriculteur vend des bouteilles de jus de fruits à sa clientèle. Chaque client achète une bouteille chaque semaine qu'il peut ensuite rapporter ou non lors de son passage la semaine suivante.

On dispose des informations suivantes :

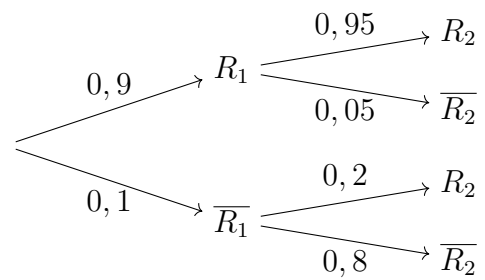
- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine.

On a alors $r_n = P(R_n)$.

1. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2 .
2. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
3. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75 \times r_n + 0,2$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (v_n) définie par :
 $v_n = r_n - 0,8$.
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de r_n en fonction de n .
5. Conjecturer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



2. La probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine est :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \\ &= 0,9 \times 0,95 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$

3. R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= P(R_{n+1}) \\ &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) \\ &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0,95 + (1 - r_n) \times 0,2 \\ &= 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n \\ &= 0,75r_n + 0,2 \end{aligned}$$

- 4.a. Pour tout entier naturel n non nul, on a
 $v_n = r_n - 0,8$, i.e. $r_n = v_n + 0,8$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= r_{n+1} - 0,8 \\ &= 0,75r_n + 0,2 - 0,8 \\ &= 0,75(v_n + 0,8) - 0,6 \\ &= 0,75v_n + 0,6 - 0,6 \\ &= 0,75v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $v_1 = r_1 - 0,8 = 0,9 - 0,8 = 0,1$.

- 4.b. Pour tout entier naturel n non nul, on a donc :

$$v_n = v_1 \times 0,75^{n-1} = 0,1 \times 0,75^{n-1}$$

Or $r_n = v_n + 0,8$, donc :

$$r_n = 0,8 + 0,1 \times 0,75^{n-1}$$

5. Puisque $-1 < 0,75 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^{n-1} = 0$.

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0,8$

Interprétation : Cela signifie que, sur le long terme, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier tend vers 0,8 soit 80 %. Autrement dit, à long terme, environ 80 % des clients rapporteront systématiquement leur bouteille, quel que soit leur comportement initial.

Solution de l'exercice 1

1. Arbre pondéré pour les deux premières semaines :



Exercice 2

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo :

un jeu de type A et un jeu de type B.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :

- A_n : « la n -ième partie est une partie de type A. »
- B_n : « la n -ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n .

Un joueur joue à des parties successives. On dispose des informations suivantes :

- Si le joueur joue une partie de type A, alors la probabilité qu'il joue une partie de type A lors de la partie suivante est 0,8.
- Si le joueur joue une partie de type B, alors la probabilité qu'il joue une partie de type A lors de la partie suivante est 0,3.

- (a) Construire et compléter un arbre pondéré illustrant la situation.
- (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

- Étude d'un cas particulier :** Dans cette question, on suppose que $a_1 = 0,5$.

On suppose que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$.

Montrer que la suite (a_n) est croissante.

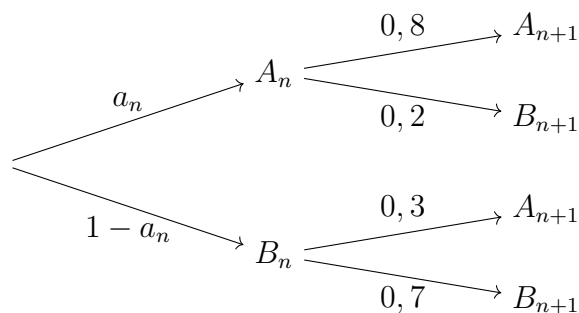
- Étude du cas général :** Dans cette question, le réel $a = a_1$ appartient à l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $u_n = a_n - 0,6$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$$

Solution de l'exercice 2 1.a. Arbre pondéré :



- 1.b.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$, A_n et B_n forment une partition de Ω .

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\ &= 0,8a_n + 0,3 - 0,3a_n \\ &= 0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

- On suppose que $0 \leq a_n \leq 0,6$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 0,5a_n + 0,3 - a_n \\ &= 0,3 - 0,5a_n \\ &\geq 0,3 - 0,5 \times 0,6 \quad (\text{car } a_n \leq 0,6) \\ &\geq 0,3 - 0,3 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc croissante.

- 3.a.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n = a_n - 0,6$, i.e. $a_n = u_n + 0,6$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\ &= 0,5(u_n + 0,6) - 0,3 \\ &= 0,5u_n + 0,3 - 0,3 \\ &= 0,5u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

- 3.b.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$$

Or $a_n = u_n + 0,6$, donc :

$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$$

Exercice 3

Julia et Lucie aiment jouer au tennis l'une contre l'autre. Lorsqu'elles débudent une partie, Julia a autant de chances de perdre que de gagner le premier jeu.

On admet que lorsque Julia gagne un jeu, la probabilité qu'elle gagne le jeu suivant est 0,6.

Si elle perd un jeu, la probabilité qu'elle perde le suivant est 0,7.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement « Julia gagne le n -ième jeu » ;
- $\overline{G_n}$ l'événement « Julia perd le n -ième jeu ».

- (a) Déterminer $P(G_1)$ et $P(\overline{G_1})$
(b) Calculer $P(G_2)$ et $P(\overline{G_2})$
- On définit les deux suites (u_n) et (v_n) suivantes :

pour tout entier naturel n ,
par $u_n = P(G_n)$ et $v_n = P(\overline{G_n})$

- En s'aidant d'un arbre pondéré, démontrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \\ \text{et } v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n$$

- Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
 - Démontrer que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique.
- (a) Quelle est la probabilité que Julia gagne le troisième jeu ?
(b) Julia a-t-elle plus de chance de gagner que son adversaire ?
(c) On admet que, pour tout n entier naturel non nul,

$$7u_n = 3 + 0,5 \times 0,3^{n-1}$$

Si Julia et Lucie jouent un très grand nombre de jeux, vers quelle valeur la probabilité que Julia gagne le dernier jeu se rapproche-t-elle ?

(b)

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1}) \\ &= P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) \\ &\quad + P_{\overline{G_1}}(G_2) \times P(\overline{G_1}) \\ &= 0,6 \times \frac{1}{2} + 0,3 \times \frac{1}{2} \\ &= 0,3 + 0,15 \\ &= 0,45. \end{aligned}$$

$$P(\overline{G_2}) = 1 - P(G_2) = 1 - 0,45 = 0,55$$

- (a) En s'aidant d'un arbre pondéré, on peut démontrer que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) \\ &\quad + P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times P(\overline{G_n}) \\ &= 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} &= P(\overline{G_{n+1}}) = P_{G_n}(\overline{G_{n+1}}) \times P(G_n) \\ &\quad + P_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}}) \times P(\overline{G_n}) \\ &= 0,4u_n + 0,7v_n \end{aligned}$$

- Montrons que la suite $(u_n + v_n)$ est constante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + v_{n+1} &= (0,6u_n + 0,3v_n) \\ &\quad + (0,4u_n + 0,7v_n) \\ &= 0,6u_n + 0,4u_n + 0,3v_n + 0,7v_n \\ &= u_n + v_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n + v_n)$ est constante et égale, par exemple, à $P(G_1) + P(\overline{G_1}) = 1$.

On peut aussi remarquer que, pour tout n entier naturel, $P(\overline{G_n}) = 1 - P(G_n)$, donc que $v_n = 1 - u_n$ et donc $u_n + v_n = 1$

- Démontrons que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique :

$$\begin{aligned} 4u_{n+1} - 3v_{n+1} &= 4(0,6u_n + 0,3v_n) \\ &\quad - 3(0,4u_n + 0,7v_n) \\ &= 2,4u_n + 1,2v_n \\ &\quad - 1,2u_n - 2,1v_n \\ &= 1,2u_n - 0,9v_n \\ &= 0,3(4u_n - 3v_n). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique de raison 0,3.

- (a) Pour déterminer la probabilité que Julia gagne le troisième jeu :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} & u_2 &= 0,6 \times \frac{1}{2} + 0,3 \times \frac{1}{2} = 0,45 \\ v_1 &= \frac{1}{2} & v_2 &= 0,4 \times \frac{1}{2} + 0,7 \times \frac{1}{2} = 0,55 \end{aligned}$$

Donc la probabilité que Julia gagne le troisième jeu est 0,435

- $0,435 < 0,5$ donc Julia a moins de chance de gagner au troisième jeu que Lucie.

Solution de l'exercice 3

$$1. \quad (a) \quad P(G_1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(\overline{G_1}) = 1 - P(G_1) = \frac{1}{2}.$$

(c) $-1 < 0, 3 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$

Donc par limite de produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5 \times 0,3^{n-1} = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7u_n = 3$, c'est-à-dire

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{7}$. Ainsi, si Julia et Lucie jouent un très grand nombre de jeux, la probabilité que Julia gagne le dernier jeu se rapproche de $\frac{3}{7}$.