

Séquence XVIII – Probabilités conditionnelles

Exercice XVIII.1

Soit une urne avec cinq boules rouges et une boule noire.

On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Soit l'événement A : « On tire une boule noire au troisième tirage, et pas avant ».

Soit l'événement B : « La première boule tirée est rouge ».

Soit l'événement C : « La deuxième boule tirée est rouge ».

Soit l'événement D : « La troisième boule tirée est noire ».

Exprimer A à l'aide de B , C et D , puis déterminer $P(A)$.

Exercice XVIII.2

Soient deux urnes H et K . On sait que :

- Dans H : il y a trois boules rouges et deux boules vertes.
- Dans K : il y a cinq boules rouges et une boule verte.

On jette un dé. Si on obtient un 1 ou un 2, on tire une boule de H . Sinon, on tire une boule de K .

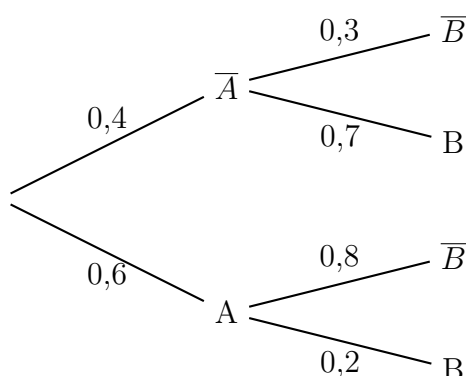
Soit l'événement A : « la boule tirée est verte ».

Soit l'événement B : « la boule tirée vient de H ».

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit verte.
2. Sachant que la boule tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle provienne de H ?

Exercice XVIII.3

Voici un arbre de probabilités concernant deux événements A et B . Quelle est la probabilité de A sachant que B est réalisé ?



Exercice XVIII.4

Sylvain possède un jeu électronique.

Une partie consiste en un duel entre Sylvain et un monstre choisi par la machine.

Deux choix équiprobables sont possibles : la machine choisit entre les monstres M_1 ou M_2 . Ces deux monstres sont de force inégale. On admet que si Sylvain combat M_1 , la probabilité qu'il gagne est de $\frac{1}{3}$ et s'il combat M_2 , la probabilité qu'il gagne est de $\frac{1}{4}$.

Soit G l'événement : « Sylvain gagne ».

Soit M_1 l'événement : « La machine choisit le monstre M_1 ».

Soit M_2 l'événement : « La machine choisit le monstre M_2 ».

Déterminer $P(G)$.

Exercice XVIII.5

À la cafétéria, dans une vitrine de pâtisseries :

- 60 % des gâteaux sont à base de crème ;
- parmi ceux qui sont à base de crème, 35 % ont aussi des fruits ;
- parmi ceux qui n'ont pas de crème, 85 % ont des fruits.

On prend un gâteau au hasard.

1. a) Calculer la probabilité qu'il soit à base de crème et comporte des fruits.
b) Calculer la probabilité qu'il soit avec des fruits mais sans crème.
c) En déduire la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits.
2. a) Le gâteau choisi au hasard comporte des fruits.
Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?
b) Le gâteau choisi au hasard ne comporte pas de fruit.
Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

Exercice XVIII.6

Un stock de champignons est constitué de trois variétés conditionnées en barquettes. Celles-ci proviennent exclusivement de France ou d'Italie.

Ce stock est composé de 50 % de barquettes de cèpes, de 30 % de barquettes de girolles et de 20 % de barquettes de morilles.

On sait que :

- 15 % des barquettes de cèpes proviennent d'Italie.
- 20 % des barquettes de girolles proviennent d'Italie.
- 40 % des barquettes de morilles proviennent d'Italie.

On choisit une barquette au hasard. On note les événements suivants :

C : « La barquette choisie contient des cèpes. »
 G : « La barquette choisie contient des girolles. »
 M : « La barquette choisie contient des morilles. »
 I : « La barquette choisie provient d'Italie. »
 F : « La barquette choisie provient de France. »

1. Construire l'arbre de probabilités associé au problème.
2. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes et provienne de France ?
3. Quelle est la probabilité que la barquette choisie provienne d'Italie ?
4. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes sachant que cette barquette provient d'Italie ? Donner une valeur arrondie à 10^{-3} .
5. La barquette choisie provient de France. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de girolles ? Donner une valeur arrondie à 10^{-3} .

Exercice XVIII.7

Dans un magasin, un acheteur potentiel s'intéresse à un lave-linge et à un sèche-linge.

La probabilité qu'il achète le lave-linge est de 0,6. La probabilité qu'il achète le sèche-linge après avoir acheté le lave-linge est de 0,7.

La probabilité qu'il achète le sèche-linge sans avoir acheté le lave-linge est de 0,1.

On désigne par L l'événement : « le client achète le lave-linge » et par S l'événement : « le client achète le sèche-linge ».

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - a) « Le client n'achète pas le lave-linge ».
 - b) « Le client n'achète pas le sèche-linge alors qu'il n'a pas acheté le lave-linge ».
2. Montrer que la probabilité que le client n'achète ni le lave-linge ni le sèche-linge est de 0,36.
3. Le lave-linge coûte 400 euros et le sèche-linge 320 euros.

On désigne par D la dépense du client.

- a) Établir les valeurs possibles de la variable aléatoire D .
- b) Déterminer la loi de probabilité de D .
- c) Calculer l'espérance mathématique de D .
- d) Le « service clientèle » du magasin sait qu'il se présente en moyenne chaque semaine 25 acheteurs potentiels pour ces appareils. Quel chiffre d'affaires hebdomadaire le magasin peut-il espérer réaliser ?

Exercice XVIII.8

Une étude a été faite sur la fréquentation du cinéma dans une ville française pendant un mois. Dans cette ville, 25 % des habitants sont dans la tranche d'âge 0 – 14 ans (les « enfants ») et 20 % des habitants dans la tranche d'âge 15 – 25 ans (les « jeunes »). Les autres habitants seront dits « adultes ».

On choisit un habitant au hasard dans cette ville. On note E , J et A les événements suivants :

- E : « L'habitant choisi est dans la tranche 0 – 14 ans. »
- J : « L'habitant choisi est dans la tranche 15 – 25 ans. »
- A : « L'habitant choisi est un adulte ».

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de séances auxquelles l'habitant choisi a assisté pendant un mois. L'étude menée permet d'établir les tableaux de probabilités conditionnelles suivants :

x_i	0	1	2	3
$P_E(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

x_i	0	1	2	3	4
$P_J(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

x_i	0	1	2	3
$P_A(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Par exemple : $p_J(X = 2)$ désigne la probabilité que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma sachant qu'il est jeune.

- Déterminer la probabilité que l'habitant choisi :
 - soit adulte.
 - soit jeune et aille deux fois par mois au cinéma.
- Calculer la probabilité pour que l'habitant choisi aille deux fois par mois au cinéma.
- Compléter le tableau suivant pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,315	0,280			

- Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter le résultat obtenu.

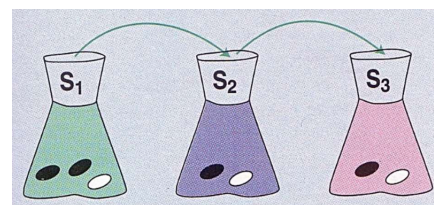
Exercice XVIII.9

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n sacs de jetons $S_1, S_2, \dots$ et S_n .

Au départ, le sac S_1 contient deux jetons noirs et un jeton blanc, et chacun des autres sacs contient un jeton noir et un jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- première étape : on tire au hasard un jeton de S_1 ;
- deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 , et on tire au hasard un jeton de S_2 ;
- troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 , on tire au hasard un jeton de S_3 ;
- etc.



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement « le jeton sorti de S_k est blanc » et $\overline{E_k}$ l'événement contraire.

- Déterminer la probabilité de E_1 et les probabilités $P_{E_1}(E_2)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la probabilité de E_2
 - Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k . Justifier que, pour tout $k \geq 1$, $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$
- Étude de la suite (p_n) : d'après les questions précédentes, on peut considérer la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $p_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$
 - On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = p_n - \frac{1}{2}$.
Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Séquence XVIII – Loi binomiale

Exercice XVIII.10

On joue quatre fois de suite à Pile ou Face.

Soit l'événement A : « On obtient exactement deux fois Pile et deux fois Face. »

Soit l'événement B : « On obtient au moins une fois Pile. »

Déterminer la probabilité de l'événement A et la probabilité de l'événement B .

Exercice XVIII.11

Il naît, en moyenne, 1044 garçons pour 1000 filles. Quelle est la probabilité qu'une famille de cinq enfants ait trois garçons ?

Quel est le nombre moyen de garçons dans une famille de cinq enfants ?

Exercice XVIII.12

Victor a téléchargé un jeu sur son téléphone. Le but de ce jeu est d'affronter des obstacles à l'aide de personnages qui peuvent être de trois types : « Terre », « Air » ou « Feu ». Au début de chaque partie, Victor obtient de façon aléatoire un personnage d'un des trois types et peut, en cours de partie, conserver ce personnage ou changer une seule fois de type de personnage. On considère dix parties jouées par Victor, prises indépendamment les unes des autres. La probabilité que Victor obtienne un personnage de type « Terre » est 0,3. On désigne par Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnages de type « Terre » obtenus au début de ses dix parties.

- Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Calculer la probabilité que Victor ait obtenu exactement trois personnages de type « Terre » au début de ses dix parties.
- Calculer la probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type « Terre » au début de ses dix parties.

Exercice XVIII.13

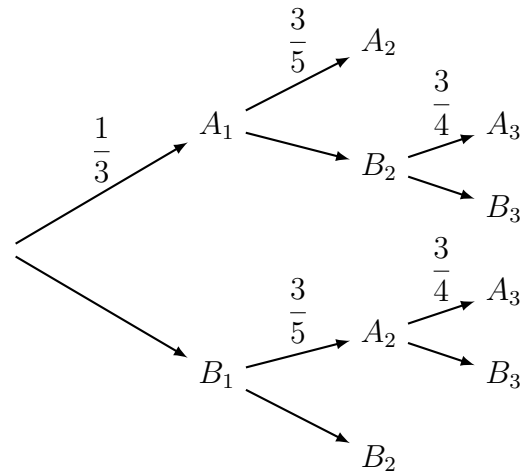
Aline et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. Lorsqu'ils disputent un match l'un contre l'autre, est déclaré vainqueur le premier qui remporte deux manches.

Aline et Benjamin décident de faire un match.

On considère les événements suivants :

- A_n : « Aline remporte la n ème manche ».
- B_n : « Benjamin remporte la n ème manche ».

On donne ci-dessous l'arbre pondéré présentant toutes les issues possibles de cette rencontre.



- Compléter l'arbre précédent.
- Quelle est la probabilité qu'Aline remporte ce match en trois manches ?
- Démontrer que la probabilité qu'Aline gagne cette rencontre est 0,6.
- Ils décident de jouer trois matchs dans l'année (les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 euros. On s'intéresse à la dépense éventuelle de Benjamin en fin d'année.
 - Quelles sont les dépenses possibles de Benjamin ?
 - Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 euros est 0,432.
 - Quelle est la loi de probabilité associée à la dépense possible de Benjamin ?
 - Calculer l'espérance de dépense en fin d'année pour Benjamin.

Exercice XVIII.14

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur-réservation afin d'abaisser les coûts.

Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie. Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 clients (qui ont réservé) ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Exercice XVIII.15

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas. Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ; si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas. On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note

- B l'événement : « l'angine du malade est bactérienne »
- T l'événement : « le test effectué sur le malade est positif »

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Montrer que $P(T) = 0,22$.
3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.
 - (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
 - (b) Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif.
 - (c) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice XVIII.16

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères, celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %. Les résultats seront, si nécessaire, arrondis à 10^{-3} .

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les événements suivants :
 - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
 - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
 - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
 - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
 - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- (c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
- (d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?

2. On choisit au hasard un échantillon de dix arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de dix arbres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement cinq conifères ?
- (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

Séquence XVIII – Loi binomiale – exercices supplémentaires

Exercice XVIII.17

Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans une entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les uns des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq amis.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés.
On arrondira à 10^{-3} près.

Exercice XVIII.18

Un magasin vend des moteurs électriques identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12. Une entreprise achète vingt moteurs électriques dans ce magasin. On admet que le nombre de moteurs vendus est suffisamment important pour que l'achat de vingt moteurs soit assimilé à vingt tirages indépendants avec remise. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Exercice XVIII.19

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune d'elles, trois propositions de réponses sont faites, une seule d'entre elles étant exacte. Un professeur demande à ses 28 élèves de répondre au hasard à chaque question de ce questionnaire. On note X le nombre d'élèves n'ayant aucune réponse exacte.

1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice XVIII.20

Une entreprise de location propose à ses clients deux types de bateaux de tourisme : bateau à voile et bateau à moteur. Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote. On admet que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42. On considère un échantillon aléatoire de quarante clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, qu'au moins quinze clients prennent l'option PILOTE.

Exercice XVIII.21

Au cours de la fabrication de verres de lunettes, le verre doit subir un traitement. On estime que 10 % des verres présentent alors un défaut pour ce traitement. On prélève, au hasard, un échantillon de cinquante verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent un défaut, puis le résultat arrondi à 10^{-3} .
3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de cinquante paires ?

Exercice XVIII.22

Le groupe sanguin O négatif (aussi appelé donneur universel) représente environ 6 % de la population française. Cinquante personnes se présentent à un don de sang. On note X le nombre de ces personnes qui sont du groupe O négatif.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'au moins deux de ces personnes soient du groupe O négatif.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercise XVIII.23

Dans cet exercice, les probabilités calculées seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près. Une entreprise produit des stylos en grande quantité. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est de 0,1. On prélève dix stylos dans le stock de cette entreprise. On suppose que le nombre de stylos produits est suffisamment grand pour que cette sélection soit assimilée à des tirages indépendants et avec remise. On note X le nombre de stylos défectueux ainsi prélevés.

1. Quelle est la loi de X ?
On précisera ses paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de X .
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement un stylo défectueux.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un stylo défectueux.
5. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux stylos défectueux.

Exercise XVIII.24

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. Calculer la probabilité $P_{X \geq 5}(X \leq 8)$.

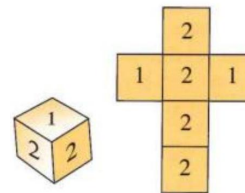
Exercise XVIII.25

Eine Urne enthält eine schwarze und vier rote Kugeln. Es werden nacheinander 10 Kugeln gezogen, wobei nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird.

1. Wie viele schwarze Kugeln sind zu erwarten ?
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :
A : „Genau zwei Kugeln sind schwarz“,
B : „Nur die erste Kugel ist schwarz“,
C : „Genau vier Kugeln sind schwarz“,
D : „Mindestens zwei Kugeln sind schwarz“,
E : „Höchstens zwei Kugeln sind schwarz“.
3. Wie viele Kugeln muss man aus dieser Urne mit Zurücklegen mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% erwartet werden kann, dass sich unter den gezogenen Kugeln mindestens eine schwarze befindet ?
4. Es wird folgendes Spiel angeboten : der Spieler erhält 4 € ausbezahlt, wenn 9 der 10 gezogenen Kugeln rot sind, und 8 € für 10 rote Kugeln.
Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair ?

Exercise XVIII.26

Ein Würfel mit dem abgebildeten Würfelnetz wird sechsmal geworfen.



1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse :
A : „Es tritt keine Eins auf“,
B : „Es treten genau 3 Zweien auf“,
C : „Es treten höchstens 2 Zweien auf“,
D : „Es treten mindestens 5 Zweien auf“.
2. Wie viele Zweien sind im Mittel zu erwarten, wenn man den Würfel 30-mal wirft ?
3. Wie oft ist der Würfel zu werfen, damit das Ereignis E : „Es tritt mindestens eine Eins auf“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% eintritt ?
4. Der Würfel wird zweimal geworfen. Die erste Zahl wird für den Koeffizienten b , die zweite Zahl für den Koeffizienten c in der quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich dabei quadratische Gleichungen mit mindestens einer reellen Lösung ?

Exercise XVIII.27

Bei einer Nachrichtenübertragung werden zwei Signale (Zeichen) 0 und 1 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 93% richtig übertragen.

1. Eine Sequenz besteht aus 7 Zeichen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse :
A : „Die Sequenz wird fehlerfrei übertragen“,
B : „Nur die ersten vier Zeichen werden fehlerfrei übertragen“,
C : „Fünf Zeichen werden fehlerfrei übertragen“,
D : „Nur ein Zeichen, und zwar das vierte oder das fünfte, wird fehlerhaft übertragen“.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von 9 aufeinander folgenden Sequenzen (aus je 7 Zeichen) mindestens 7 Sequenzen richtig übertragen ?
3. Wie viele fehlerfreie Zeichen sind bei einer Sequenz aus 2000 Zeichen zu erwarten ?
4. Wie groß ist die Standardabweichung von dem erwarteten Wert ?