

Probabilités (partie 2)

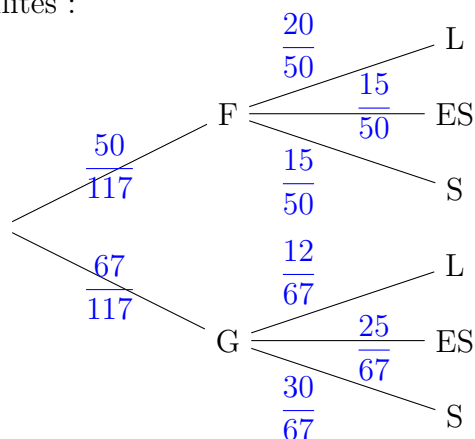
1. Probabilités conditionnelles

Exemple :

On considère la répartition suivante :

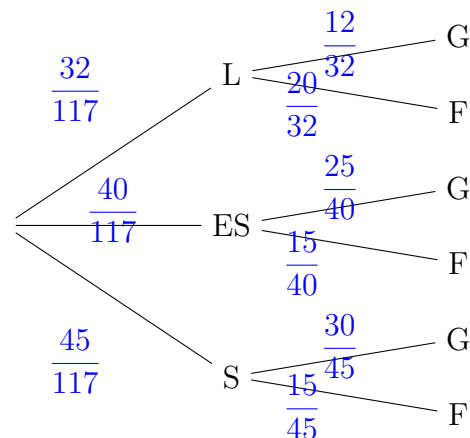
Classes de Terminale	L	ES	S	Total
Filles	20	15	15	50
Garçons	12	25	30	67
Total	32	40	45	117

On peut associer à ce tableau deux arbres de probabilités :



Alors :

- $P(G) = \frac{67}{117}$
- $P(F) = \frac{50}{117}$
- Par ailleurs, la probabilité d'être en L sachant que l'on est un garçon est $\frac{12}{67}$; ceci s'appelle une **probabilité conditionnelle**.



Alors :

- $P(L) = \frac{32}{117}$
- $P(ES) = \frac{40}{117}$
- On a aussi que la probabilité d'être un garçon sachant que l'on est en L est $\frac{12}{32}$
noté $P_L(G) = \frac{12}{32}$.

Remarque : On constate donc que

$$P_L(G) \neq P(G)$$

. Ainsi, l'événement L « influence » l'événement G .
Il faut voir $P_L(G)$ comme la probabilité de G en remplaçant $\Omega = \{\text{Tous les élèves}\}$ par $L = \{\text{Tous les élèves en } L\}$ c'est-à-dire

$$P(G) = P_{\Omega}(G) = \frac{67}{117} \text{ et } P_L(G) = \frac{12}{32}$$

Remarque : Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} P_L(G) &= \frac{\text{card}(G \cap L)}{\text{card}(L)} \\ &= \frac{\text{card}(G \cap L) / \text{card}(\Omega)}{\text{card}(L) / \text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{P(G \cap L)}{P(L)} \end{aligned}$$

d'où la définition suivante :

■ DÉFINITION :

Soit un univers Ω et une probabilité P sur Ω . On considère un événement A de probabilité non nulle. Pour tout événement B , la **probabilité de l'événement B sachant l'événement A**, notée $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$) est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : On a donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque : $P_A(B)$ est lu « P de B sachant A ».

Exemple :

Soit un jeu de 52 cartes.

On tire successivement deux cartes sans remise.

Soit l'événement A : « On tire deux piques ».

Soit l'événement B : « La première carte tirée est un pique ».

Soit l'événement C : « La seconde carte tirée est un pique ».

Calculons $P(A)$. On a $A = B \cap C$.

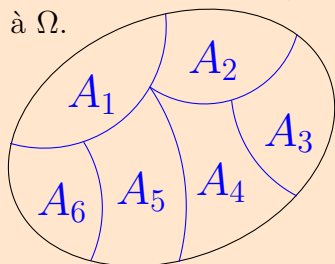
$$\begin{aligned} P(A) &= P(B \cap C) \\ &= P(B) \times P_B(C) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \\ &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

Soit Ω un espace probabilité fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_n , n événements de Ω .

On dit que $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_n forme un **système complet d'événements** de Ω , ou une **partition** de Ω si et seulement si :

1. Aucun des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'est vide.
2. L'intersection de deux événements quelconques des événements $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_n est vide.
3. La réunion des événements $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_n est égale à Ω .

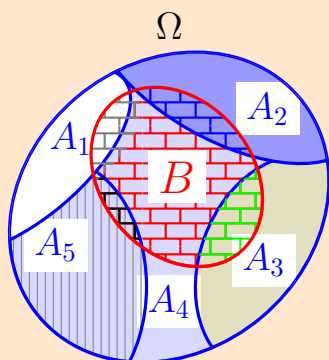


Remarque : A et $\bar{A}$ forment un système complet d'événements, donc une partition de Ω .

■ THÉORÈME : (Formule des probabilités totales)

Soit Ω un espace probabilité fini.
Soient $A_1, A_2, \dots$ et A_n un système complet d'événements de Ω .
Soit B un événement quelconque de Ω .

On a $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \dots \cup (A_n \cap B)$,
où $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ sont incompatibles.



On en déduit que

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)]$$

Or, les événements sont incompatibles, donc

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Exemple :

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines identiques M_1, M_2 et M_3 plus ou moins récentes. La fabrication se répartit sur trois machines, chaque machine produisant une pièce finie. Une pièce fabriquée comporte parfois un défaut, selon le degré de vétusté de la machine qui l'a produite. La répartition de la fabrication sur les trois machines et la fréquence des défauts sont données par le tableau suivant :

Machine	M_1	M_2	M_3
Proportion de pièces fabriquées	50 %	35 %	15 %
Fréquence des défauts	1 %	2 %	6 %

On prélève au hasard une pièce dans la production. On appelle D l'événement « La pièce prélevée présente un défaut » et M_i l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine M_i » pour $i = 1, 2, 3$.

- Calculer $P(D)$.

On a $D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$.
 M_1, M_2 et M_3 forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)] \\
 &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\
 &= P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D) \\
 &= P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D) \\
 &= \frac{50}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{6}{100} \\
 &= \frac{2,1}{100} \\
 &= 2,1 \%
 \end{aligned}$$

- La pièce tirée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ? On cherche $P_D(M_1)$.

$$\begin{aligned}
 P_D(M_1) &= \frac{P(D \cap M_1)}{P(D)} \\
 &= \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(D)}{P(D)} \\
 &= \frac{\frac{50}{100} \times \frac{1}{100}}{\frac{2,1}{100}} = \frac{5}{21}
 \end{aligned}$$

2. Événements indépendants

Exemple :

Dans une entreprise employant 250 salariés, dont 200 ouvriers et 50 cadres, on a réalisé une enquête pour recenser les volontaires pour travailler de nuit.

	Volontaires	Non volontaires	Totaux
Ouvriers	80	120	200
Cadres	20	30	50
Total	100	150	250

Pour chaque salarié, les résultats (cadre ou pas cadre, volontaire ou pas volontaire) sont indiqués sur une fiche. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard la fiche d'un salarié. On appelle V l'événement : « la fiche est celle d'un volontaire » et C l'événement « la fiche est celle d'un cadre ». Que vaut cette fois $P(V)$?

Cette fois, on a $P(V) = \frac{100}{250}$.

Donc $P(V) = \frac{2}{5}$.

Que vaut cette fois $P_C(V)$?

Cette fois, $P_C(V) = \frac{20}{50}$, donc $P_C(V) = \frac{2}{5}$.

Comment interpréter ce résultat ?

Cela signifie que l'événement C n'a pas d'influence sur l'événement V . La probabilité que l'événement V ait lieu est la même que celle que l'événement V ait lieu **sachant que** l'événement C a eu lieu.

Remarque : On a les équivalences suivantes :

$$P_C(V) = P(V) \iff \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = P(V)$$

$$\iff P(C \cap V) = P(C) \times P(V)$$

■ DÉFINITION :

Soit Ω un univers.

Soit P une probabilité définie sur Ω .

Soient A et B deux événements sur Ω .

A et B sont indépendants

si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$



Attention

Ne pas confondre indépendants et incompatibles.

■ RAPPEL :

Deux événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si $P(A \cap B) = 0$.

Remarque : D'une manière générale,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P_B(A) \times P(B)$$

et $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Exemple :

Reprenons l'exemple des pièces métalliques. Les événements D et M_1 sont-ils indépendants ?

On a :

• $P(D) = \frac{2,1}{100}$ d'après l'exemple de la page précédente.

• $P(M_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ • $P(D \cap M_1) = \frac{1}{100}$

Alors $P(D) \times P(M_1) = \frac{2,1}{100} \times \frac{1,05}{100}$.

Donc $P(D) \times P(M_1) \neq P(D \cap M_1)$.

Ainsi les événements D et M_1 ne sont pas indépendants.

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Soient les événements T = « la carte tirée est un trèfle » et A = « la carte tirée est un As ». Les événements A et T sont-ils indépendants ?

On a

• $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ • $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

• $P(A \cap T) = \frac{1}{32}$

Alors $P(A) \times P(T) = \frac{1}{32}$.

Donc $P(A) \times P(T) = P(A \cap T)$.

Ainsi les événements A et T sont indépendants.

3. Épreuves répétées : loi binomiale

On considère une expérience n'admettant que deux résultats possibles, appelés « succès » ou « échec » et notés respectivement S et $\bar{S}$. On répète l'épreuve dans des conditions **identiques**, les résultats successifs étant **indépendants** les uns des autres.

Exemple :

On jette un dé non truqué.

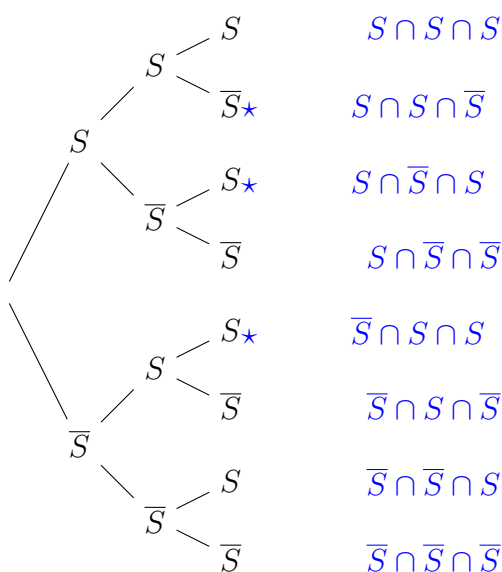
Notons S l'événement : « On obtient un 6. » On a alors $P(S) = \frac{1}{6}$.

On jette le dé trois fois de suite.

On note A l'événement « Obtenir trois succès de suite. » Calculer $P(A)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S \cap S \cap S) \\ &= p \times p \times p \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Soit un événement B : « On obtient exactement deux fois 6 au cours des trois jets. » Quelle est la probabilité de B ?



$$B = (S \cap S \cap \bar{S}) \cup (S \cap \bar{S} \cap S) \cup (\bar{S} \cap S \cap S)$$

Ces trois événements sont **incompatibles deux à deux**.

$$P(B) = P[(S \cap S \cap \bar{S}) \cup (S \cap \bar{S} \cap S) \cup (\bar{S} \cap S \cap S)]$$

$$P(B) = P(S \cap S \cap \bar{S}) + P(S \cap \bar{S} \cap S) + P(\bar{S} \cap S \cap S)$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(B) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{72}$$

Combien de chemins comportent deux succès et un échec ? Il y a 3 chemins qui permettent de réaliser deux succès et un échec.

On introduit la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de ces trois lancers. Montrer que $P(X = 1) = \frac{25}{72}$.

$$P(X = 1) = P[(S \cap \bar{S} \cap \bar{S}) \cup (\bar{S} \cap S \cap \bar{S}) \cup (\bar{S} \cap \bar{S} \cap S)]$$

$$P(X = 1) = P(S \cap \bar{S} \cap \bar{S}) + P(\bar{S} \cap S \cap \bar{S}) + P(\bar{S} \cap \bar{S} \cap S)$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = \frac{25}{72}$$

Déterminer la loi de probabilité de X .

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$P(X = 0) = (1 - p)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X ?

Son écart-type ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\ &= 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 2 \times \frac{5}{72} + 3 \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\ &= 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 4 \times \frac{5}{72} + 9 \times \frac{1}{216} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Et d'après le lemme de König-Huygens,

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

■ DÉFINITION :

Une expérience aléatoire comportant deux issues (succès S ou échec $\bar{S}$) s'appelle une **épreuve de Bernoulli**.

■ DÉFINITION :

La répétition d'une même épreuve de Bernoulli, avec **indépendance** des tirages, s'appelle un **schéma de Bernoulli**.

■ DÉFINITION :

Dans un schéma de Bernoulli, si l'on appelle p la probabilité d'un succès (donc $P(S) = p$), n le nombre d'essais et X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès, on dit que la variable X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée : $\mathcal{B}(n; p)$ et on écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Pour tout k entier de l'intervalle $\llbracket 0 ; n \rrbracket$, la probabilité $P(X = k)$ d'obtenir exactement k succès est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons d'obtenir exactement k succès dans n épreuves.

Exemple :

$\binom{4}{3} = 4$. Il y a 4 façons d'obtenir **trois** succès quand l'épreuve est répétée **quatre** fois :

$SSS\bar{S}$
 $SS\bar{S}S$
 $S\bar{S}SS$
 $\bar{S}SSS$

$\binom{4}{2} = 6$. Il y a 6 façons d'obtenir **deux** succès quand l'épreuve est répétée **quatre** fois :

$SS\bar{S}\bar{S}$
 $S\bar{S}S\bar{S}$
 $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$
 $S\bar{S}\bar{S}S$
 $\bar{S}S\bar{S}S$
 $\bar{S}\bar{S}SS$

Exemple :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$.

Retrouvons la loi de probabilité de X décrite à l'exemple initial.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \frac{125}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit X la variable aléatoire qui suit une loi binomiale de $\mathcal{B}(n; p)$. Alors

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple :

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$, donc

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma(X) &= \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \\ &= \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

Calculer des probabilités avec une loi binomiale

Voici un exemple dont le but est de calculer $P(X \leq 27)$ et $P(X = 25)$, où X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,45)$.

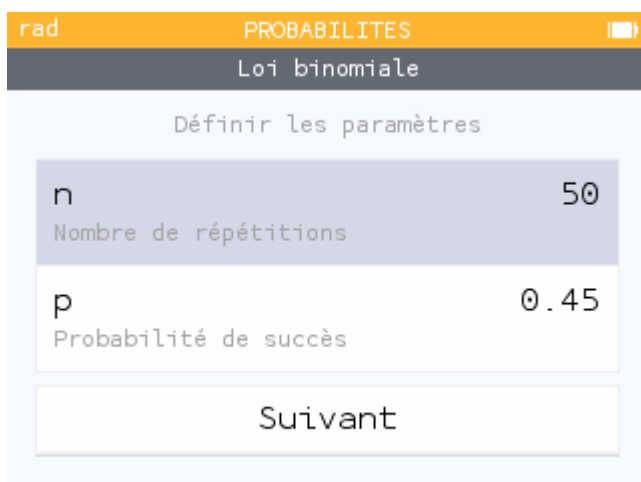
- Aller dans le mode « Probabilités » de la calculatrice



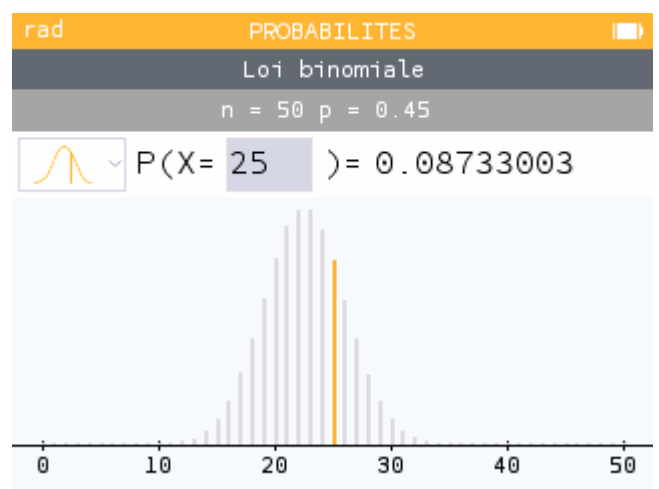
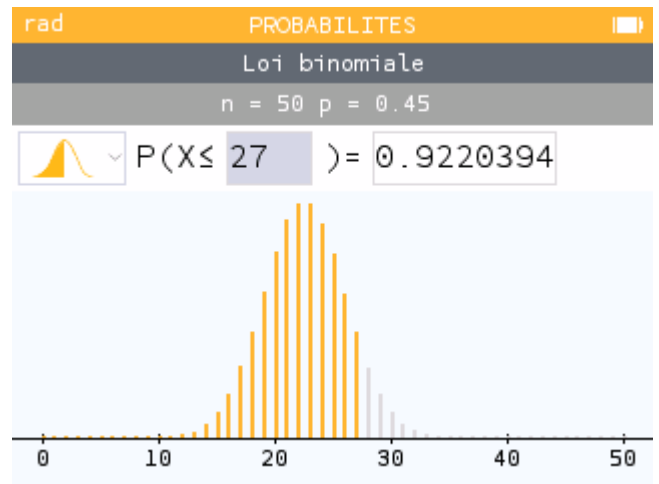
- Sélectionner « Binomiale »



- Inscrire les paramètres de la loi binomiale (ici, $n = 50$ et $p = 0,45$)



- Modifier les paramètres de la calculatrice en fonction de la question posée :



Voici en vidéo comment construire une loi de probabilité avec la loi binomiale

<https://youtu.be/pXON7g60lZA?si=6SZHCYgVEXyZ579w>

