

Devoir maison n°

À rendre le

Dénombrement & Poker

Rappel des règles :

Un jeu de trente-deux cartes est composé de quatre familles, qui sont Trèfle, Carreau, Cœur et Pique. Dans chacune de ces familles (appelées abusivement « couleurs »), on a huit cartes, qui sont 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As ; on les appelle des hauteurs.

Il y a donc quatre cartes par hauteur, une par famille.

Au poker, chaque joueur reçoit une main de cinq cartes. Les différentes annonces sont :

- **Paire** : deux cartes de même hauteur
- **Double paire** : deux paires de hauteurs différentes
- **Brelan** : trois cartes de même hauteur
- **Suite (ou Quinte)** : cinq cartes consécutives mais pas toutes de la même famille
- **Couleur** : cinq cartes de la même famille mais pas consécutives
- **Full** : trois cartes de même hauteur et deux cartes de même hauteur (hauteurs distinctes)
- **Carré** : quatre cartes de même hauteur
- **Quinte flush** : cinq cartes consécutives de la même famille

Questions :

1. Calculer le nombre total de « mains » de cinq cartes possibles.
2. **Carré** : Calculer le nombre de mains contenant un carré (quatre cartes de même hauteur et une autre carte).
3. **Full** : Calculer le nombre de mains contenant un full.
4. **Brelan** : Calculer le nombre de mains contenant un brelan (trois cartes de même hauteur, mais ni full ni carré). Proposer trois méthodes de calcul.
5. **Double paire** : Calculer le nombre de mains contenant une double paire (deux paires de hauteurs différentes, mais ni full ni carré).
6. **Paire** : Calculer le nombre de mains contenant exactement une paire (deux cartes de même hauteur, sans former de double paire, full ou carré). Proposer deux méthodes de calcul.
7. **Quinte flush** : Calculer le nombre de mains contenant une quinte flush.

8. **Suite** : Calculer le nombre de mains contenant une suite (cinq cartes consécutives mais pas de la même famille).
9. **Couleur** : Calculer le nombre de mains contenant une couleur (cinq cartes de la même famille mais pas consécutives).
10. Dresser un tableau récapitulatif des probabilités d'obtention de chaque annonce (en pourcentage).

Solution:**1. Nombre total de mains**

C'est le nombre de façons de choisir de façon simultanée, et donc sans ordre et sans remise, 5 cartes parmi 32 :

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 201\,376$$

2. Carré

Il y a 8 hauteurs possibles. Pour chaque hauteur :

- On prend les 4 cartes de cette hauteur : $\binom{4}{4} = 1$ façon
- On choisit une carte parmi les $32 - 4 = 28$ restantes : $\binom{28}{1} = 28$ façons

$$\text{Total} : 8 \times \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 8 \times 1 \times 28 = 224$$

3. Full

Il y a 8 hauteurs. On doit en choisir 2 pour former le full :

- Choisir la hauteur du brelan : 8 possibilités
- Choisir la hauteur de la paire : 7 possibilités (parmi les hauteurs restantes)
- Choisir 3 cartes parmi les 4 de la hauteur du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ façons
- Choisir 2 cartes parmi les 4 de la hauteur de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ façons

$$\text{Total} : 8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 8 \times 7 \times 4 \times 6 = 1\,344$$

4. Brelan

Première méthode : On choisit une hauteur parmi 8, puis 3 cartes de cette hauteur parmi 4, puis deux autres cartes distinctes parmi les 28 restantes. Attention : il faut diviser par 2 car l'ordre des deux dernières cartes n'importe pas.

$$8 \times \binom{4}{3} \times \frac{28 \times 24}{2} = 8 \times 4 \times \frac{28 \times 24}{2} = 8 \times 4 \times 336 = 10\,752$$

Deuxième méthode : Une hauteur parmi 8 pour le brelan, 3 cartes parmi 4 pour cette hauteur, puis 2 hauteurs parmi les 7 restantes, et dans chacune une carte parmi 4.

$$8 \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 8 \times 4 \times 21 \times 4 \times 4 = 10\,752$$

Troisième méthode : Une hauteur parmi 8, 3 cartes parmi 4, puis 2 cartes parmi les 28 restantes, en retranchant les fulls comptés en trop.

$$8 \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} - 1\,344 = 8 \times 4 \times 378 - 1\,344 = 12\,096 - 1\,344 = 10\,752$$

On remarque (avec satisfaction) que les trois méthodes donnent le même résultat !

5. Double paire

On choisit 2 hauteurs parmi 8 pour les paires, puis 2 cartes parmi 4 pour chaque paire, et enfin une carte parmi les $32 - 4 - 4 = 24$ restantes.

$$\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 28 \times 6 \times 6 \times 24 = 24\,192$$

6. Paire

Première méthode : On choisit une hauteur parmi 8, 2 cartes parmi 4 pour cette hauteur, puis 3 cartes distinctes parmi les 28 restantes. Il faut diviser par $3!$ car l'ordre des 3 dernières cartes n'importe pas.

$$8 \times \binom{4}{2} \times \frac{28 \times 24 \times 20}{3!} = 8 \times 6 \times \frac{28 \times 24 \times 20}{6} = 8 \times 6 \times 2\,240 = 107\,520$$

Deuxième méthode : Une hauteur parmi 8 pour la paire, 2 cartes parmi 4,

puis 3 hauteurs parmi les 7 restantes, et dans chacune une carte parmi 4.

$$8 \times \binom{4}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{1}^3 = 8 \times 6 \times 35 \times 4^3 = 8 \times 6 \times 35 \times 64 = 107\,520$$

Remarque : Ce nombre est environ dix fois plus grand que le nombre de brelans !

7. Quinte flush

On choisit une famille parmi 4. Dans un jeu de 32 cartes, il y a exactement 4 suites possibles :

- 7-8-9-10-V
- 8-9-10-V-D
- 9-10-V-D-R
- 10-V-D-R-A

Total : $4 \times 4 = 16$

8. Suite (ou Quinte)

Il y a 4 suites possibles, et pour chaque carte de la suite, on peut choisir n'importe quelle famille parmi 4. On retranche ensuite les quintes flush.

$$4 \times 4^5 - 16 = 4 \times 1\,024 - 16 = 4\,080$$

9. Couleur

On choisit une famille parmi 4, puis 5 cartes de cette famille parmi 8, en retranchant les quintes flush.

$$4 \times \binom{8}{5} - 16 = 4 \times 56 - 16 = 224 - 16 = 208$$

10. Tableau récapitulatif

Annonce	Cas favorables	Pourcentage
Total	201 376	100 %
Quinte flush	16	0,008 %
Carré	224	0,111 %
Full	1 344	0,667 %
Couleur	208	0,103 %
Suite	4 080	2,026 %
Brelan	10 752	5,339 %
Double paire	24 192	12,013 %
Paire	107 520	53,393 %
« Rien »	53 040	26,309 %

Remarque : Le nombre de mains « rien » s'obtient par soustraction :

$$201\,376 - (16 + 224 + 1\,344 + 208 + 4\,080 + 10\,752 + 24\,192 + 107\,520) = 53\,040$$

On remarque notamment qu'avec un jeu de 32 cartes :

- il est plus probable d'obtenir une paire que de ne rien obtenir
- il est plus de deux fois plus probable d'obtenir une paire que de ne rien obtenir.