

Séquence XVII – Dénombrements – p -listes et arrangements

p -listes

Exercice 1

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution de l'exercice 1 Il y a 3 choix pour l'entrée, 2 choix pour le plat et 4 choix pour le dessert, il y a donc $3 \times 2 \times 4 = 24$ menus différents.

Exercice 2

Le code d'une carte bleu est un entier à quatre chiffres, le premier pouvant être nul. Combien y a-t-il de codes possibles pour une carte bleue ?

Solution de l'exercice 2 Le code s'écrit avec quatre chiffres, et chacun des chiffres est un entier compris entre 0 et 9. Il y a donc 10 possibilités pour chacun des chiffres, c'est-à-dire $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ codes possibles.

Exercice 3

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de la même façon et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Solution de l'exercice 3 Un poème est une 14-liste de 14 nombres choisis parmi 10 (le premier nombre désignant le numéro de page où est sélectionné le premier vers, et ainsi de suite). Il y a 10 possibilités pour le premier vers, 10 pour le deuxième, ..., 10 pour le quatorzième, il y a 10^{14} poèmes possibles, c'est-à-dire 100 000 000 000 000 poèmes possibles, ce qui correspond au titre du recueil.

Exercice 4

Pour son vélo, Éric possède un antivol à code qui est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9. Mais Éric a oublié son code !

- Combien de combinaisons doit-il essayer dans le pire des cas avant de retrouver la bonne ?
- Même question en supposant qu'Éric se souvient que son code
 - commence par le chiffre 8
 - se termine par un chiffre pair
 - ne contient que des chiffres pairs
 - ne contient que des chiffres impairs
 - contient au moins un chiffre pair
 - contient exactement un chiffre pair

Solution de l'exercice 4

- Éric doit essayer 10^3 combinaisons au maximum.
- $1 \times 10 \times 10 = 10^2 = 100$
 - $10 \times 10 \times 5 = 500$
 - $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
 - $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
 - $1000 - 125 = 875$ (c'est la différence entre le nombre total de codes et le nombre de codes qui ne contiennent que des chiffres impairs).

On peut aussi ajouter le nombre de codes ayant un chiffre pair en première position (puis n'importe quel chiffre ensuite), puis un chiffre impair en première position, un chiffre pair en deuxième position et n'importe quel chiffre ensuite, et enfin un chiffre impair en première et en deuxième position, et un chiffre pair en troisième position. On obtient alors le même résultat, écrit :

$$\begin{aligned} & 5 \times 10 \times 10 + 5 \times 5 \times 10 + 5 \times 5 \times 5 \\ &= 500 + 250 + 125 \\ &= 875 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} & 5 \times 10 \times 10 + 10 \times 5 \times 10 + 10 \times 10 \times 5 \\ &= 3 \times 5 \times 10 \times 10 \\ &= 1500 \end{aligned}$$



Exercice 5

Au concours Kangourou, il y a 24 questions comportant chacune une et une seule réponse exacte parmi A, B, C, D et E .

1. Combien y a-t-il de grilles réponses distinctes ?
2. Combien y a-t-il de grilles réponses comportant exactement une bonne réponse ?
3. Combien y a-t-il de grilles réponses comportant au moins une bonne réponse ?

Solution de l'exercice 5

1. 5^{24}
2. $1 \times 4^{23} + 4 \times 1 \times 4^{22} + \dots + 4^{23} \times 1 = 24 \times 4^{23}$
3. $5^{24} - 4^{24}$, car le nombre de grille ayant au moins une mauvaise réponse est égal à la différence entre le nombre total de grilles et le nombre de grille ayant strictement moins qu'une bonne réponse (c'est-à-dire le nombre de grilles n'ayant aucune bonne réponse).

Arrangements

Calculer A_7^2 et A_5^5 à la main, puis vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

Solution de l'exercice 6

$$\begin{aligned} A_7^2 &= 7 \times 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_5^5 &= 5! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Et en effet

rad	CALCULS	
permute(7, 2)	42	
permute(5, 5)	120	

À l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze.

Combien y-a-t-il de podiums possibles (sans ex-æquo, et avant la compétition, bien sûr...) ?

Solution de l'exercice 7 Il y a A_{18}^3 solutions possibles, et

$$\begin{aligned} A_{18}^3 &= 18 \times 17 \times 16 \\ &= 4896 \end{aligned}$$

Il y a donc 4896 podiums possibles.

Dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il d'arrivées possibles sans ex-æquo des trois premiers (le « tiercé gagnant ») ?

Solution de l'exercice 8 Il s'agit de choisir un arrangement de trois chevaux (sans répétition car il n'y a pas d'ex-æquo). Ainsi, on calcule A_3^30 , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A_2^3 &= 20 \times 19 \times 18 \\ &= 6840 \end{aligned}$$

Il y a donc 6840 podiums possible.

Pour cet exercice, on rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui comporte les mêmes lettres que celui-ci. Par exemple : IMAGE et MAGIE. Un mot est considéré comme sa propre anagramme.

1. Quel est le nombre d'anagrammes (ayant ou non un sens) du mot MATHS ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes (ayant ou non un sens) du nom PASCAL ?
3. Combien peut-on former de mots de trois lettres (ayant ou non un sens) en utilisant une seule fois les lettres du mot FACTEUR ? Même question si elles sont éventuellement répétées ?

Solution de l'exercice 9

1. Une anagramme est un mot obtenu en effectuant une permutation des lettres du mot initial. Le mot MATHS contient 5 lettres. Il y a donc 5! permutations possibles, c'est-à-dire $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ anagrammes possibles.
2. Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot. On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

$$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

3. Il y a A_6^3 façons de former des mots de trois lettres (avec ou sans sens) en utilisant une seule fois les lettres du mot FACTEUR, c'est-à-dire $6 \times 5 \times 4 = 120$ façons.

Si on accepte que les lettres soient répétées, on cherche alors à former une 3-listes en prenant des lettres du mot FACTEUR (donc parmi 6 lettres distinctes). Il y a $6^3 = 216$ mots qui peuvent être formés.

Dans une ville de 32 000 habitants, le conseil municipal est composé de 39 membres. Les conseillers municipaux sont élus sur des listes de 39 membres, avec alternance Homme/Femme.

Un parti politique dispose de 40 candidates et 60 candidats.

Il est déjà décidé que la tête de liste est Mme *A*, que le second de la liste sera obligatoirement M.*B*, suivi de Mme *C*, M.*D* et enfin Mme *E*. Les autres conseillers municipaux peuvent être choisis parmi les candidat(e)s disponibles.

Combien y a-t-il de listes possibles ?

Solution de l'exercice 10 Les choix sont faits avec ordre et sans répétition, car la liste électorale est ordonnée et une personne ne peut occuper deux postes à la fois. On commence par choisir une femme, il y a 19 femmes dans la liste (nombre de nombre impairs entre 1 inclus et 39 inclus). il va falloir en choisir A_{40}^{20} . Puis, pour les hommes, il va falloir en choisir 19 (c'est-à-dire le nombre d'hommes sur la liste électorale). On calcule donc A_{60}^{19} .

$$A_{40}^{20} = 40 \times 39 \times 38 \times \cdots \times 21$$

$$A_{60}^{19} = 60 \times 59 \times 58 \times \cdots \times 42$$

Puis, on multiplie les résultats entre eux (le principe est multiplicatif). Ainsi, il y a $A_{40}^{20} \times A_{60}^{19}$ résultats d'élection possibles.

Séquence XVII – Dénombrements – combinaisons

Exercice 11

Il y a 24 élèves dans une classe de terminale.
De combien de manières peut-on choisir des binômes de délégués (sans leurs suppléants) ?

Solution de l'exercice 11 $\binom{24}{2} = 276$

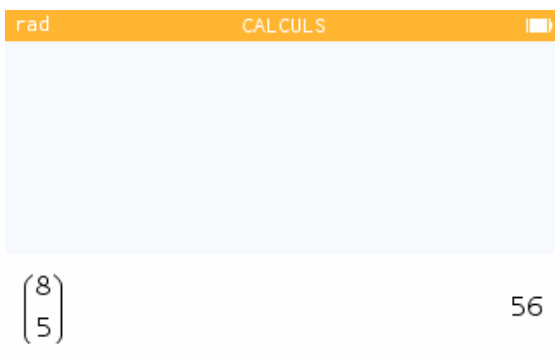
Il y a 276 manières de choisir les binômes de délégués (sans leurs suppléants).

Exercice 12

Calculer à la main $\binom{8}{5}$, puis avec la calculatrice.

Solution de l'exercice 12

$$\begin{aligned} \binom{8}{5} &= \frac{8!}{5!(8-5)!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 8 \times 7 \\ &= 56 \end{aligned}$$



Exercice 13

Un tirage du Loto est une combinaison de 6 numéros choisis parmi 49, ainsi qu'un « numéro chance », entre 1 et 5.
Combien y a-t-il de tirages possibles au Loto ?

Solution de l'exercice 13 On choisit d'abord 6 numéros parmi 49 sans tenir compte de l'ordre, puis un numéro chance parmi 5. Il y a donc

$$\binom{49}{6} \times \binom{5}{1}$$

grilles possibles, c'est-à-dire $\binom{49}{6} \times 5$, ou encore 69 919 800 grilles possibles.

Exercice 14

Au concours Kangourou, combien y a-t-il de grilles avec exactement 5 réponses correctes ? (les règles du Kangourou sont rappelés dans l'exercice XVII.5)

Solution de l'exercice 14 On choisit tout d'abord l'emplacement des 5 bonnes réponses. Il y a $\binom{24}{5}$ réponses possibles. Puis, pour chacune des 19 réponses fausses, il y a 4 possibilités. Ainsi, il y a $\binom{24}{5} \times 4^{19}$ grilles avec exactement 5 réponses correctes.



Exercice 15

Une araignée se trouve en A sur une toile aux motifs carrés. Une mouche est immobilisée par la toile, au point M .



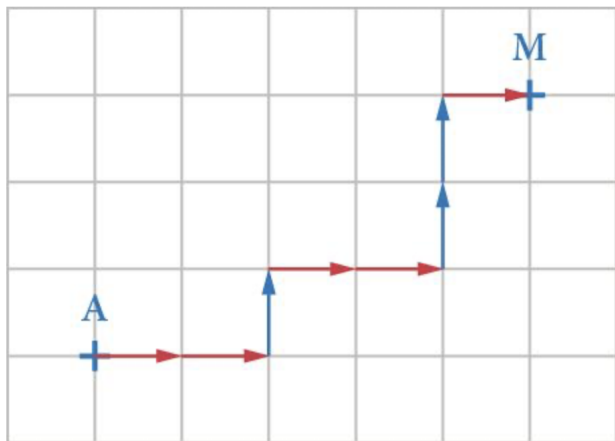
L'araignée souhaite attraper la mouche mais ne peut se déplacer que le long des filins de sa toile,

vers la droite et vers le haut.

Combien de chemins différents peut prendre l'araignée pour atteindre la mouche ?

Solution de l'exercice 15 Le nombre total de cases à parcourir par l'araignée, pour atteindre la mouche, est de 5 cases horizontalement et de 3 cases verticalement.

Il s'agit donc de créer un chemin dans lequel on représente par D le déplacement d'une case vers la droite et par H le déplacement d'une case vers le haut. Par exemple, un chemin possible est $DDHDDHHD$, représenté ci-dessous.



On doit dénombrer le nombre de chemins. On est donc amené à créer des « mots » de $5 + 3 = 8$ lettres. On se pose la question du nombre de manières de choisir les emplacements des 5 lettres D dans le « mot ». On peut choisir les 5 emplacements de D parmi les 8 positions possibles. Or,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

Il y a donc 56 manières de choisir les emplacements de la lettre D dans les « mots ».

La manière de choisir les emplacements de la lettre D dans le « mot » va induire les emplacements de la lettre H dans le « mot ».

Conclusion : il existe 56 chemins différents qui permettent à l'araignée d'atteindre la mouche.

Remarque : Par symétrie, il est équivalent de chercher à déterminer le nombre de manières de placer les 3 lettres H parmi les 8 positions possibles :

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} = \binom{8}{5} = 56$$

Séquence XVII – Dénombrements – exercices variés

Exercice 16

Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on constituer de « mains » de 8 cartes ?

Solution de l'exercice 16 Une main est une collection de 8 cartes choisies parmi 32. On ne tient pas compte de l'ordre. Ainsi, il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles, c'est-à-dire 10 518 300 mains possibles.

Exercice 17

On appelle « mot » une suite de deux points et cinq traits. Par exemple : $- \bullet - \bullet - - -$
Combien de tels mots peut-on écrire ?

Solution de l'exercice 17 Pour écrire un tel mot, on choisit l'emplacement des deux points parmi 7 emplacements. Ainsi, il y a $\binom{7}{2}$ choix possibles, c'est-à-dire 21 choix possibles.

Exercice 18

Dix-huit personnes se rencontrent et chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de main échangées ?

Solution de l'exercice 18 Le nombre de poignées de mains est le nombre de façons de choisir 2 personnes parmi 18, sans tenir compte de l'ordre. Ainsi, il a $\binom{18}{2}$, c'est-à-dire 153 poignées de mains échangées.

Exercice 19

On réunit 5 personnes qui écrivent les unes après les autres leur mois de naissance sur une même feuille. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Solution de l'exercice 19 Un résultat est une liste de 5 mois de naissances (il y a 12 possibilités à chaque fois), avec ordre. Ainsi, il y a $12^5 = 248\,832$ résultats possibles.

Exercice 20

Une association de 20 membres veut constituer un bureau formé de trois personnes : un(e) président(e), un(e) secrétaire, un(e) trésorier(e). Combien de bureaux différents peut-on constituer ?

Solution de l'exercice 20 Un bureau est une liste de 3 personnes, mais chaque personne ne peut tenir qu'un rôle dans le bureau. Il y a donc A_{20}^3 bureaux différents possibles, c'est-à-dire $20 \times 19 \times 18 = 6840$ bureaux possibles.

Exercice 21

Sur un damier de 4×4 cases, on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

1. On suppose que les jetons sont de quatre couleurs différentes. De combien de façons peut-on les disposer ?
2. On suppose que les jetons sont identiques. De combien de façons peut-on les disposer ?

Solution de l'exercice 21

1. Si on place des jetons de couleurs différentes parmi les $4 \times 4 = 16$ cases, cela revient à choisir 4 cases avec ordre (car les couleurs imposent un ordre) et sans remise (on ne peut pas mettre deux pions sur la même case). Ainsi, on peut les disposer de $A_{16}^4 = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43\,680$ façons.
2. Si on place des jetons sans couleurs les $4 \times 4 = 16$ cases, cela revient à choisir 4 cases sans ordre et sans remise. Ainsi, on peut les disposer de $\binom{16}{4} = 1820$ façons.

Exercice 22

Dans une classe composée de 17 filles et de 15 garçons, on veut choisir deux délégués.

1. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?
2. On veut un délégué garçon et une déléguée fille. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?

Solution de l'exercice 22

1. Il y a $\binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496$ façons de choisir les délégués (car un binôme de délégués et un choix de deux élèves parmi 32, sans ordre et sans remise).
2. On choisit un délégué parmi les garçons et un autre parmi les filles. Ainsi, il y a $17 \times 15 = 255$ binômes de délégués possibles avec cette contrainte.

Exercice 23

L'accès à un immeuble est commandée par un appareil à digicode. Le code comporte cinq éléments, trois chiffres et deux lettres.

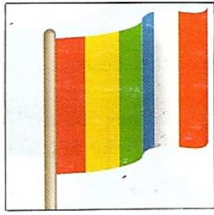
1. On suppose que le code est formé (dans cet ordre) de trois chiffres puis de deux lettres.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes commencent par trois chiffres identiques ?
 - (c) Combien de codes ont trois chiffres différents ?
2. On suppose maintenant que le code est formé de trois chiffres et de deux lettres, pas forcément dans cet ordre.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes comportent deux lettres identiques ?

Solution de l'exercice 23

1.
 - (a) Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 676\,000$ digicodes possibles.
 - (b) Si les trois premiers chiffres sont identiques, il y a 10 choix possibles pour les trois premiers chiffres, puis 26×26 choix pour les lettres. Il y a donc $6\,760$ digicodes possibles commençant par trois chiffres identiques.
 - (c) $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 26 = 486\,720$.
2.
 - (a) Sans tenir compte de l'ordre, il s'agit donc de prendre 3 nombres sans ordre et sans remise parmi 10 et 2 lettres parmi 26. Il y a donc $\binom{10}{3} \times \binom{26}{2} = 120 \times 325 = 39\,000$ codes possibles.
 - (b) Puisqu'on cherche les codes comportant deux lettres identiques, il s'agit de choisir une lettre parmi 26 (cette lettre aura deux emplacements) et 3 chiffres parmi 10. Ainsi, il y a $\binom{10}{3} \times 26 = 120 \times 26 = 4\,320$ digicodes possibles.

Exercice 24

On veut colorier les six bandes du drapeau, en utilisant 5 couleurs au maximum et de façon que deux bandes voisines n'aient pas la même couleur.



Combien y a-t-il de drapeaux possibles ?

Solution de l'exercice 24 Il s'agit de colorier les couleurs de la première à la dernière.

Il y a 5 couleurs possibles pour la première.

Puisqu'il ne faut pas que deux bandes voisines aient la même couleur, il y a 4 possibilités pour la deuxième.

Il y a alors 4 possibles pour la troisième, puis 4 possibilités pour la quatrième, 4 pour la cinquième et 4 pour la sixième.

Ainsi, il y a au total $5 \times 4^5 = 5\,120$ façons de colorier le drapeau.

Exercice 25

En informatique, on appelle octet une liste de huit éléments pris dans l'ensemble $\{0; 1\}$. Par exemple : 01001100 ou 11100011 sont des octets.

1. Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 et se terminant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets comportant exactement quatre 1 ?

Solution de l'exercice 25

1. Un octet est une liste ordonnée d'éléments avec ordre et avec remise. Ainsi, un octet est une 8-listes, et il y a $2^8 = 256$ octets possibles.
2. Il y a $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^6 = 64$ octets commençant par un 0 et terminant par un 0.
3. Puisqu'il y a exactement quatre 1 à placer, il s'agit de choisir l'emplacement des quatre 1 parmi les huit disponibles, le reste étant des 0. Ainsi, il y a $\binom{8}{4} = 70$ octets avec exactement quatre 1.

Exercice 26

Un QCM est constitué de cinq questions. Pour chacune des cinq questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Les réponses sont cochées sur une grille-réponse.

1. Combien y a-t-il de grilles réponses possibles ?
2. Combien y a-t-il de grilles avec toutes les réponses correctes ?
3. Combien y a-t-il de grilles avec exactement quatre réponses correctes ?
4. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois réponses correctes ?

Solution de l'exercice 26

1. Pour chaque question : 3 choix possibles. Nombre total de grilles : $3^5 = 243$
2. Il n'y a qu'une seule grille avec toutes les bonnes réponses : 1
3. Il faut choisir 4 questions exactes parmi 5, et pour la question fausse, choisir une mauvaise réponse parmi 2. Nombre de grilles : $\binom{5}{4} \times 2^1 = 5 \times 2 = 10$
4. Il faut choisir 3 questions exactes parmi 5, et pour les 2 questions fausses, choisir une mauvaise réponse parmi 2 pour chacune. Nombre de grilles : $\binom{5}{3} \times 2^2 = 10 \times 4 = 40$

Exercice 27

Un caractère de l'écriture en Braille destiné aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci-dessous :

o o
o o
o o

1. Combien de caractères Braille peut-on concevoir ?
2. Dénombrer les caractères Braille à quatre points.
3. Dénombrer les caractères Braille formés de quatre points qui soient les sommets d'un rectangle.

Solution de l'exercice 27

1. Chaque trou peut être piqué ou non, sauf le cas où aucun trou n'est piqué : $2^6 - 1 = 63$
2. $\binom{6}{4} = 15$
3. Il faut que les 4 points forment un rectangle. Dans la grille 3×2 , les rectangles possibles ont leurs sommets aux positions correspondant aux coins d'un rectangle.

Séquence XVII – Propriétés des coefficients binomiaux



Exercice 28

Développer :

1. $(2+x)^8$
2. $(1-2x)^7$
3. À l'aide de la formule du binôme, démontrer que, pour tout entier naturel n , 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4.

Solution de l'exercice 28

1.

$$\begin{aligned}(2+x)^8 &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 2^{8-k} x^k \\ &= 256 + 1024x + 1792x^2 + 1792x^3 + 1120x^4 \\ &\quad + 448x^5 + 112x^6 + 16x^7 + x^8\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(1-2x)^7 &= \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 1^{7-k} (-2x)^k \\ &= 1 - 14x + 84x^2 - 280x^3 + 560x^4 - 672x^5 \\ &\quad + 448x^6 - 128x^7\end{aligned}$$

3. En posant $x = 1$ dans $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$:

$$\begin{aligned}2^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ 5^n &= (1+4)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k \\ &= 1 + 4 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1}\end{aligned}$$

Donc $5^n = 1 + 4M$ où M est un entier.



Exercice 29

On considère une grille de mots croisés de 5×5 cases. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul qu'il y a autant de grilles avec 5 cases noires que de grilles avec 20 cases noires ?

Solution de l'exercice 29 Le nombre de façons d'avoir 5 cases noires est le même que celui de « ne pas avoir 5 » cases blanches, la couleur importe peu... En terme de coefficients binomiaux, cela vient de l'égalité $\binom{25}{5} = \binom{25}{25-5}$, c'est-à-dire $\binom{25}{5} = \binom{25}{20}$



Exercice 30

n est un entier naturel. On note

$$u_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$$

Démontrer à l'aide de la formule du binôme que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier.

Solution de l'exercice 30

Posons $a = 3 + \sqrt{5}$ et $b = 3 - \sqrt{5}$.

Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}a^n &= (3 + \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k \\ b^n &= (3 - \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (-\sqrt{5})^k\end{aligned}$$

En additionnant les deux expressions :

$$u_n = a^n + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (-\sqrt{5})^k$$

On regroupe les termes de même rang :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} [(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k]$$

Étudions le terme $(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k$ selon la parité de k :

— **Si k est impair** : $(-\sqrt{5})^k = -(\sqrt{5})^k$, donc

$$(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k = (\sqrt{5})^k - (\sqrt{5})^k = 0$$

Les termes d'indice impair s'annulent.

— **Si k est pair** : $(-\sqrt{5})^k = (\sqrt{5})^k$, donc

$$(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k = 2(\sqrt{5})^k$$

Les termes d'indice pair sont doublés.

Seuls les termes avec k pair subsistent. En posant $k = 2j$:

$$u_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} \cdot 2(\sqrt{5})^k = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} 3^{n-2j} \cdot 2(\sqrt{5})^{2j}$$

Pour tout entier j : $(\sqrt{5})^{2j} = ((\sqrt{5})^2)^j = 5^j$, qui est un entier.

Donc :

$$u_n = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} 3^{n-2j} 5^j$$

Chaque terme de cette somme est un produit d'entiers. Ainsi, $u_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Exercice 31

Pour tout réel x et tout entier naturel n , on pose

$$f(x) = (1+x)^n$$

1. En développant $f(x)$, montrer que :

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

2. Calculer

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$$

Solution de l'exercice 31

1. On a $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

En dérivant par rapport à x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \\ &= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1} \end{aligned}$$

2. En posant $x = 1$ dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} n(1+1)^{n-1} &= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} \\ n \times 2^{n-1} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \end{aligned}$$



Exercice 32

En utilisant le développement de $(1+x)^{2n}$, démontrer que :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Solution de l'exercice 32 Considérons le développement de $(1+x)^{2n}$ de deux façons différentes :

Méthode 1 : $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$

Méthode 2 : $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j\right)$

Le coefficient de x^n dans le second développement est :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

Le coefficient de x^n dans le premier développement est $\binom{2n}{n}$.

Par identification : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$



Exercice 33

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On extrait simultanément n boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages ?

2. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que le nombre de tirages contenant exactement p boules blanches est : $\binom{n}{p}^2$.

3. En déduire la somme :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

Solution de l'exercice 33

1. Il faut choisir n boules parmi $2n$ boules au total. Nombre de tirages : $\binom{2n}{n}$

2. Pour avoir exactement p boules blanches : - Choisir p boules blanches parmi n : $\binom{n}{p}$ façons - Choisir $(n-p)$ boules noires parmi n : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ façons

Nombre de tirages : $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p} = \binom{n}{p}^2$

3. D'après la question 1, le nombre total de tirages est $\binom{2n}{n}$. D'après la question 2, ce même nombre peut s'écrire comme la somme de tous les tirages possibles selon le nombre de boules blanches :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \end{aligned}$$



Exercice 34

Deux joueurs participent à un tournoi de tennis. Le premier tour de ce tournoi va mettre aux prises ces joueurs au cours de n rencontres.

Démontrer qu'il y a $\frac{(2n)!}{2^n \times n!}$ façons d'organiser ce premier tour.

Solution de l'exercice 34 Pour organiser n rencontres entre $2n$ joueurs : - Il faut former n paires de joueurs - L'ordre des rencontres n'importe pas - Dans chaque rencontre, l'ordre des joueurs n'importe pas
Nombre de façons :

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{Nombre de façons de choisir les paires}}{\text{Nombre de façons d'ordonner les paires}} \\ &= \frac{\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \times \binom{2}{2}}{n!} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \times n!} \end{aligned}$$



Exercice 35

La formule de Vandermonde^a

On considère une urne contenant m boules blanches et n boules noires m et n étant deux entiers naturels non nuls.

1. Pour p entier naturel, combien l'urne contient-elle de parties à p boules ?
2. Combien de parties à p boules de l'urne contiennent :
 - exactement 0 boule blanche et p boules noires ?
 - exactement 1 boule blanche et $p - 1$ boules noires ?
 - exactement 2 boules blanches et $p - 2$ boules noires ?
 - ...
 - exactement p boules blanches et 0 boule noire ?

3. Montrer la Formule de Vandermonde :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

a. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1^{er} janvier 1796, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier.

Solution de l'exercice 35

1. L'urne contient $m + n$ boules au total. Le nombre de parties à p boules est : $\binom{m+n}{p}$
2. Pour avoir exactement k boules blanches et $(p - k)$ boules noires :
 - $k = 0$: $\binom{m}{0} \binom{n}{p} = \binom{n}{p}$ façons
 - $k = 1$: $\binom{m}{1} \binom{n}{p-1}$ façons
 - $k = 2$: $\binom{m}{2} \binom{n}{p-2}$ façons
 - ...
 - $k = p$: $\binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m}{p}$ façons

En général, pour k boules blanches : $\binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ façons.

3. D'après la question 1, le nombre total de parties à p boules est $\binom{m+n}{p}$.

D'après la question 2, ce même nombre peut être calculé en sommant sur tous les cas possibles selon le nombre de boules blanches : $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$

Cette égalité constitue la formule de Vandermonde.