

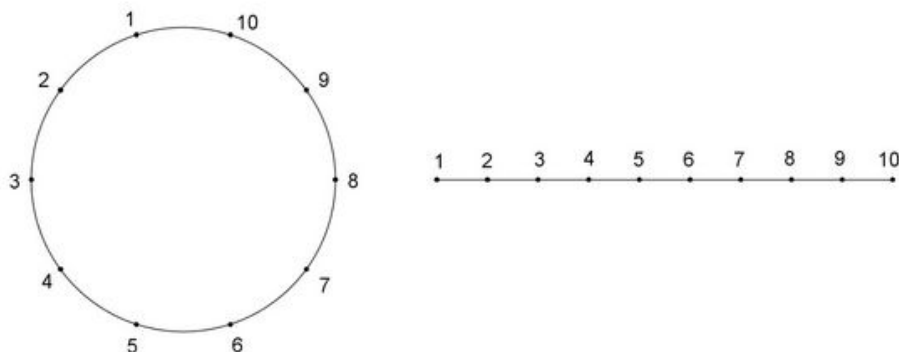
**Dix chevaliers de la Table ronde sont réunis.**

**Après une interruption dans les débats, chacun se rasseoit, à sa place d'origine ou à une place immédiatement voisine de celle-ci.**

**Combien de tables différentes peut-on ainsi constituer ?**

*(Exercice 1 du thème : logique, dénombrement / Stage préolympique de l'Académie de Versailles pour les élèves de première S.)*

Dans un premier temps, nous allons quitter la Table ronde pour une table rectangulaire, sur laquelle nos dix chevaliers (nommés 1, 2, 3, ..., 9, 10) seront assis, tous d'un même côté ; les chevaliers 1 et 10 étant aux deux extrémités de la table. Nous schématiserons cette situation avec un segment de droite (cf. la figure ci-dessous).



Et nous allons raisonner avec une table, non pas de dix, mais d'un nombre quelconque de chevaliers, noté  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Les règles de « retour à la Table » sont inchangées : chaque chevalier a trois possibilités pour se rasseoir, à l'exception des chevaliers 1 et  $n$ , qui ne peuvent regagner la table qu'à leur place initiale ou à celle de leur seul voisin (respectivement les chevaliers 2 et  $n-1$ ).



Nous noterons aussi  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) le nombre de tables (de  $n$  chevaliers) envisageables au retour de la suspension de séance. Il est clair que  $f_1 = 1$  et  $f_2 = 2$ . Considérons maintenant un entier  $n$ , supérieur ou égal à 3.

Le chevalier  $n$  peut, soit reprendre sa place (i), soit occuper celle de son voisin, le chevalier  $n-1$  (ii).

(i) : S'il reprend sa place, il y a alors, pour les  $n-1$  autres chevaliers,  $f_{n-1}$  façons de se réinstaller.

(ii) : S'il prend la place du chevalier  $n-1$ , ce dernier, ne pouvant plus se rasseoir à la sienne, ne peut qu'occuper les places  $n$  (ii') ou  $n-2$  (ii'').

(ii') : Si le chevalier  $n-1$  regagne la place  $n$ , autrement dit, si les chevaliers  $n$  et  $n-1$  échangent leurs places, il y a, pour les  $n-2$  autres chevaliers,  $f_{n-2}$  façons de se réinstaller.

(ii'') : Si le chevalier  $n-1$  s'installe à la place  $n-2$ , alors le chevalier  $n-2$ , ne pouvant s'asseoir aux places  $n-2$  et  $n-1$  (occupées respectivement par les chevaliers  $n-1$  et  $n$ ), ne peut qu'aller à la place  $n-3$ . De même, le chevalier  $n-3$  ne peut alors que s'installer à la place  $n-4$ . Et ainsi de suite, jusqu'au chevalier 2 contraint de s'asseoir à la place 1, et au chevalier 1... jeté hors de la table ! Situation évidemment impensable.

Ainsi le chevalier  $n$  ne peut que retrouver sa place ou l'échanger avec celle du chevalier  $n-1$ . Dans le premier cas, il y a, pour nos  $n$  chevaliers,  $f_{n-1}$  façons de se rasseoir ; dans le second cas, il y en a  $f_{n-2}$ . Et il n'y a aucune table commune à ces deux cas, puisque le chevalier  $n$  occupe une place différente dans les deux cas.

On a donc :  $\forall n \geq 3$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ . On reconnaît la suite de Fibonacci :  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2$  et, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  (cf. le polycopié **Quelques suites remarquables**).

Revenons au problème initial, i.e. considérons maintenant une table ronde.

Le chevalier 1 peut, après l'interruption, soit reprendre sa place ( $\alpha$ ), soit occuper celle d'un de ses deux voisins, les chevaliers 2 et 10 ( $\beta$ ).

( $\alpha$ ) : S'il reprend sa place, les neuf autres chevaliers se retrouvent dans la situation étudiée au début, i.e. comme s'ils étaient assis à une table rectangulaire. Ils ont donc  $f_9$  façons de se réinstaller.

( $\beta$ ) : S'il s'installe à la place du chevalier 2, alors, soit il échange sa place avec le chevalier 2, soit ce dernier s'installe à celle du 3.

- Si les chevaliers 1 et 2 échangent leurs places, les huit autres chevaliers sont dans la situation étudiée initialement : ils ont alors  $f_8$  façons de se réinstaller.
- Si le chevalier 2 vient à la place du 3, celui-ci est obligé de se rasseoir à la place du 4, et ainsi de suite ... le chevalier 10 venant occuper « en bout de table » la place du 1. Dans ce cas, les chevaliers n'ont qu'une seule façon de se réinstaller.

Le dénombrement est évidemment le même si le chevalier 1 se rasseoit à la place du 10.

Nous comptons donc  $f_9 + 2f_8 + 2 = 128$  réinstallations différentes pour nos dix chevaliers.

Mais **attention**, si aucun « repère » n'est placé sur la table ou en dehors de celle-ci, nous aurons des difficultés à distinguer les deux « permutations circulaires » comptées au ( $\beta$ ), l'une dans le sens direct (quand le chevalier 1 vient à la place du 2), l'autre dans le sens indirect (quand il prend celle du 10). Nous ne constaterons alors que 127 réinstallations différentes.

## I. La suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci porte le nom d'un mathématicien du XIII<sup>e</sup> siècle, connu également sous le nom de Léonard de Pise. C'est la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N}, & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

1) Nous allons exprimer le terme général  $F_n$  de cette suite en fonction de  $n$ .

On dit qu'une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété (P) si tout terme de la suite est la somme des deux termes précédents, i.e. si :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ .

$\alpha$ ) Si  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont deux suites vérifiant la propriété (P), alors, quels que soient les réels  $a$  et  $b$ , la suite  $(W_n)$ , définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = a U_n + b V_n$ , la vérifie aussi.

En effet, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$W_{n+2} = a U_{n+2} + b V_{n+2} = a(U_{n+1} + U_n) + b(V_{n+1} + V_n) = (a U_{n+1} + b V_{n+1}) + (a U_n + b V_n) = W_{n+1} + W_n.$$

$\beta$ ) Cherchons des suites géométriques de la forme  $(q^n)$  [ $q \in \mathbb{R}$ ] vérifiant (P).

$$(q^n) \text{ vérifie (P)} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \Leftrightarrow q^2 = q + 1 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0 (*).$$

Des calculs élémentaires montrent que l'équation (\*) admet deux solutions :  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (ce dernier nombre est appelé nombre d'or et est noté  $\varphi$ ). Des calculs tout aussi élémentaires nous donnent :  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$ .

Les suites de terme général  $\varphi^n$  et  $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$  vérifient donc (P).

$\gamma$ ) D'après  $\alpha$ ) et  $\beta$ ), la suite  $(W_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = a \cdot \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + b \cdot \varphi^n$  (où  $a$  et  $b$  sont deux réels) vérifie la propriété (P).

$\delta$ ) Choisissons maintenant des réels  $a$  et  $b$  pour que :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = F_n$ .

Puisque  $(W_n)$  et  $(F_n)$  vérifient (P), si on a  $W_0 = F_0$  et  $W_1 = F_1$ , alors nécessairement :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = F_n$ .

$$\begin{cases} W_0 = F_0 \\ W_1 = F_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^0 + b \cdot \varphi^0 = 0 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^1 + b \cdot \varphi^1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -\frac{a}{\varphi} + b\varphi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b\varphi^2 = \varphi \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow \varphi L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ (\varphi^2 + 1)b = \varphi \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}.$$

Rappelons que  $\varphi$  est une des deux solutions de l'équation (\*) du 2) ; on a donc :  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ .

D'où :  $\varphi^2 = \varphi + 1$  et  $\varphi^2 + 1 = \varphi + 2$ . Ainsi,  $a = -\frac{\varphi}{\varphi + 2}$  et  $b = \frac{\varphi}{\varphi + 2}$ .

Par ailleurs,  $\varphi + 2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 = \frac{\sqrt{5}+5}{2} = \sqrt{5} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \sqrt{5} \cdot \varphi$ .

Donc :  $b = \frac{\varphi}{\sqrt{5} \cdot \varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  et  $a = -\frac{\varphi}{\sqrt{5} \cdot \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right]$ .

Rappelons que :  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $-\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  [cf. le  $\beta$ ) du 1)].

L'égalité obtenue ci-dessus peut donc aussi s'écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ , égalité qui

constitue **la formule de Binet** (Jacques Philippe Marie BINET, mathématicien français né à Rennes le 2 février 1786, et mort à Paris le 12 mai 1856). Cette formule, découverte par Daniel Bernoulli en 1728, tomba ensuite dans l'oubli jusqu'à ce que Jacques Binet la redécouvre en 1843.

**2) Le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n \left[ 1 - \left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^n \right]. \text{ Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^n}.$$

$-\frac{1}{\varphi^2} \in ]-1, 1[$ , donc  $\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^n \rightarrow 0$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ), d'où  $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ).

**3) À partir du rang 0,  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  est une très bonne approximation de  $F_n$  ; plus précisément,  $F_n$  est l'entier le plus**

**proche de  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ .**  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$ , donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\varphi} \right)^n$ .

La suite de terme général  $\left( \frac{1}{\varphi} \right)^n$  est strictement décroissante, et :  $\forall n \geq 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\varphi} \right)^n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < 0,45$ .

Ainsi :  $\forall n \geq 0, \left| F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| < 0,45$ . D'où :  $\forall n \geq 0, \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \in \left] F_n - \frac{1}{2}, F_n + \frac{1}{2} \right]$ .  $F_n$  est donc l'entier le plus proche de  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ ,

dès le rang 0. Dans la formule de Binet, le deuxième terme  $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$  est suffisamment petit, dès le rang 0, pour que les

termes de la suite de Fibonacci puissent être obtenus uniquement à partir du premier terme :  $\forall n \geq 0, F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ .

**4) Voici un programme pour T.I. 83 Plus, permettant le calcul de  $F_n$ , pour  $n \geq 2$ .**

```
: Prompt N
: 0 → B
: 1 → C
: For(A,2,N)
: B + C → D
: C → B
: D → C
: End
: Disp N,D
```

## II. Les fonctions génératrices.

**Définition.** La fonction génératrice associée à la suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la fonction  $G$  définie par :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

### Commentaires.

1. Nous avons ci-dessus une écriture où apparaît une somme *infinie* de termes. Quel sens donner à une telle somme ?

Considérons une suite (infinie) de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il apparaît sensé d'affirmer que, si la suite des sommes  $a_0$ ,  $a_0 + a_1$ ,

$a_0 + a_1 + a_2$ ,  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ , ...,  $\sum_{k=0}^n a_k$ , ... tend vers une limite finie quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors cette limite pourra être considérée comme la somme de *tous* les  $a_n$ . Nous poserons donc la définition suivante :

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite (infinie) de réels. Si la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n a_k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) admet une limite finie quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , cette limite sera notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  et sera appelée la somme des  $a_n$ .

2. Donnons un exemple :

Nous savons que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$  (une somme de termes d'une suite géométrique de raison  $x$ ). Nous savons aussi que : si  $|x| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$ . On a donc : si  $|x| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = \frac{1}{1 - x}. \text{ Autrement dit, avec la notation adoptée au 1. ci-dessus : si } |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} (*).$$

Nous avons là l'exemple le plus simple de fonction génératrice, celle associée à la suite constante  $a_n = 1$  :  $G(x) = \frac{1}{1 - x}$ .

3. Nous ne considérerons pas les *fonctions génératrices* comme des fonctions dont on calcule les valeurs, auquel cas les égalités que nous utiliserions ne seraient garanties que pour certaines valeurs de  $x$  à préciser : par exemple, l'égalité (\*) ci-dessus n'est valable que pour des réels de l'intervalle  $] -1 ; 1[$ . Nous les prendrons plutôt de façon formelle, comme un jeu d'écriture. Plus précisément, nous les regarderons comme une extension des polynômes (les polynômes peuvent être vus comme des cas particuliers de fonctions génératrices : celles associées aux suites nulles à partir d'un certain rang) ; et nous leur appliquerons les opérations usuelles des polynômes : addition, multiplication, composition, dérivation, ...

Ainsi nous pourrons utiliser les règles de calcul suivantes :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites de réels ;  $\lambda$  est un réel ;  $k$  est un entier naturel.

$$(R_1) : \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

$$(R_2) : \lambda \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n.$$

$$(R_3) : x^k \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+k}.$$

$$(R_4) : \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

(dans le produit de deux polynômes, le terme de degré  $n$  est obtenu en faisant la somme des produits d'un terme de degré  $i$ , de l'un des polynômes, et d'un terme de degré  $j$ , de l'autre polynôme, pour tous les couples  $(i, j)$  tels que  $i + j = n$ ).

4. Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  et  $(a_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k^n = \binom{k+n-1}{k}$ . Montrons par récurrence que la fonction génératrice de la suite  $(a_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  est :  $G(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$ .

- Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $P(n)$  l'affirmation suivante :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$ .

- Initialisation ( $n=1$ ). On a :  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k^1 = \binom{k}{k} = 1$ .  $P(1)$  a été démontrée au 2. ci-dessus.

- Hérédité. Soit  $n$  un entier  $\geq 1$  quelconque. Supposons  $P(n)$  vraie.

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{(1-x)^n} \times \frac{1}{(1-x)} = \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n x^k \right] \times \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^1 x^k \right]$ .  $P(n)$  et  $P(1)$  sont vraies.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i^n a_{k-i}^1 \right) x^k \quad \text{Règle (R}_4\text{) ci-dessus.}$$

$$\text{On a : } \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^k a_i^n a_{k-i}^1 = \sum_{i=0}^k \binom{i+n-1}{i} = \binom{k+n}{k} = a_k^{n+1}.$$

L'avant-dernière égalité ci-dessus se démontrant aisément par récurrence sur  $k$ .

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1, \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{n+1} x^k$ . Ce qui achève notre récurrence.

Cette « formule » reste valable pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} : (1-x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k-\alpha-1}{k} x^k$ , où l'on a posé par définition, pour tout

$$\alpha \in \mathbb{R} : \binom{\alpha}{0} = 1 \text{ et } \binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-r+1)}{r!}, \text{ pour } r \in \mathbb{N}^*.$$

5. L'intérêt des fonctions génératrices dans l'étude des suites de nombres est le suivant :

si  $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  peut s'écrire comme une fonction simple de  $x$ , alors l'identification des coefficients de  $x^n$  donne une formule pour  $a_n$ . Montrons-le sur deux exemples : *la suite de Fibonacci et les nombres de Catalan*.

### III. Où l'on retrouve la formule de Binet à l'aide des fonctions génératrices.

Rappelons que la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour relation de récurrence  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  (pour tout entier  $n \geq 2$ ), avec  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ .

La fonction génératrice qui lui est associée est définie par :  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ .

On a :  $F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$  ( $F_0 = 0$ ;  $F_1 = 1$ ;  $\forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .)

$$= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n \quad (\text{règle (R}_1\text{), cf. fin du II.})$$

$$= x + x \left( \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} \right) + x^2 \left( \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2} \right) \quad (\text{règle (R}_3\text{).})$$

$$= x + x \left( \sum_{k=1}^{+\infty} F_k x^k \right) + x^2 \left( \sum_{l=0}^{+\infty} F_l x^l \right) \quad (\text{changement d'indices : } k = n-1 \text{ et } l = n-2.)$$

$$= x + xF(x) + x^2 F(x) \quad (F_0 = 0 \text{ donc } F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n.)$$

$$\text{D'où : } F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = x, \quad (1 - x - x^2) F(x) = x, \quad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

(évidemment pour  $x$  tel que  $1 - x - x^2 \neq 0$ )

Effectuons maintenant ce qu'on appelle la *décomposition en éléments simples* de la fraction rationnelle  $\frac{x}{1 - x - x^2}$ .

Les racines du trinôme  $1 - x - x^2$  sont  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$  et  $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\varphi$ .

Nous pouvons donc écrire, pour tout réel  $x$  :

$$1 - x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{\varphi}\right)(x + \varphi) = \left(\frac{1}{\varphi} - x\right)(x + \varphi) = \frac{1}{\varphi}(1 - \varphi x)\varphi\left(\frac{1}{\varphi}x + 1\right) = (1 - \varphi x)\left(1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x\right).$$

Notons  $D$  l'ensemble  $\mathbb{R} - \left\{-\varphi, \frac{1}{\varphi}\right\}$ . Il s'agit maintenant de déterminer deux réels  $A$  et  $B$  tels que :  $\forall x \in D$ ,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \varphi x} + \frac{B}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} \quad (*). \text{ On a : } \forall x \in D, \frac{A}{1 - \varphi x} + \frac{B}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} = \frac{(A+B) + \left(\frac{1}{\varphi}A - \varphi B\right)x}{1 - x - x^2}.$$

Pour obtenir l'égalité (\*), il suffit donc de choisir des réels  $A$  et  $B$  tels que :  $\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{1}{\varphi}A - \varphi B=1 \end{cases} \quad (S).$

$$(S) \Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\varphi} L_1 \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \\ B = -\frac{\varphi}{\varphi^2+1} \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in D, \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \left[ \frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} \right] \quad (**).$$

On a :  $\frac{\varphi^2 + 1}{\varphi} = \varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}$  ; d'où :  $\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  . Remplaçons les fractions  $\frac{1}{1 - \varphi x}$  et  $\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x}$

par leur version « série infinie » (cf. le commentaire 2 du II) ; cela donne :  $\frac{1}{1 - \varphi x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n$  , pourvu que  $|\varphi x| < 1$  ; et  $\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{1}{\varphi}\right]^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n x^n$  , pourvu que  $\left|-\frac{1}{\varphi}x\right| < 1$  . En utilisant ces résultats et les règles

(R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>), l'égalité (\*\*) peut s'écrire :  $\forall x \in D, \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right) x^n$  .

Rappelons que  $\frac{x}{1 - x - x^2} = F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$  ; on a donc établi l'égalité suivante :

$$\forall x \in D, \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right) x^n .$$

En identifiant les coefficients de  $x^n$  , nous obtenons de nouveau la formule de Binet.

#### IV. La suite des nombres de Catalan.

La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des nombres de Catalan apparaît souvent sous de nombreuses interprétations combinatoires où elle est

définie de la façon suivante : 
$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \end{cases} .$$

Elle porte le nom du mathématicien franco-belge Eugène Charles Catalan (né le 30 mai 1814 à Bruges et mort le 14 février 1894 à Liège). [Pour plus d'informations au sujet de Catalan et de certains problèmes combinatoires dans lesquels cette suite intervient, lire le polycopié intitulé *La triangulation des polygones convexes*.]

Nous allons trouver l'expression explicite de cette suite à l'aide des fonctions génératrices.

Notons  $C$  la fonction génératrice de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  .

On a :  $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \right) x^n$  ( $c_0 = 1$  ;  $\forall n \geq 1, c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$  .)

$$= 1 + x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} \right) x^{n-1} \right) \text{ (Règle (R}_3\text{). )}$$

$$= 1 + x \left( \sum_{N=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^N c_k c_{N-k} \right) x^N \right) \text{ (changement d'indice : } N = n - 1 \text{ .)}$$

$$= 1 + x [C(x)]^2 \text{ (Règle (R}_4\text{) dans le cas où } a_n = b_n \text{ .)}$$

L'équation du second degré  $x[C(x)]^2 - C(x) + 1 = 0$  détermine la fonction génératrice :  $C(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1 - 4x})$  .

On a :  $\sqrt{1 - 4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-3/2}{n} 4^n x^n$  [cf. II. 4.]  $= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-3/2}{n} 4^n x^n$   $\left[ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \binom{\alpha}{0} = 1 \right]$  .

D'où :  $C(x) = \frac{1}{2x} \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-3/2}{n} 4^n x^n \right)$  .

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$4^n \binom{n-3/2}{n} = 4^n \times \frac{(n-3/2)(n-3/2-1)(n-3/2-2)\dots(n-3/2-(n-3))(n-3/2-(n-2))(n-3/2-(n-1))}{n!}$$

$$= 4^n \times \frac{(n-3/2)(n-5/2)(n-7/2)\times\dots\times(3/2)(1/2)(-1/2)}{n!} = 2^n \times \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\dots\times 3\times 1\times(-1)}{n!}$$

[  $4^n = 2^n \times 2^n$  et il y a  $n$  facteurs au numérateur.]

$$= -2^n \times \frac{(2n-3)!}{(2n-4)(2n-6)(2n-8)\times\dots\times 2\times n!} = -2^n \times \frac{(2n-3)!}{2(n-2)\times 2\times(n-3)\times 2\times(n-4)\times\dots\times 2\times n!}$$

$$= -2^n \times \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!\times n!} = -2^n \times \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}(2n-2)(n-2)!\times n!} = -2^n \times \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\times n!} \quad [2n-2=2(n-1)]$$

$$= -\frac{2}{n} \times \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\times(n-1)!} \quad [n\times(n-1)! = n!] = -\frac{2}{n} \times \binom{2n-2}{n-1}$$

$$\text{Ainsi : } C(x) = \frac{1}{2x} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \right) = \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \quad (\text{R\`egle (R}_3\text{).})$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N} x^N \quad (\text{Changement d'indice : } N = n-1.)$$

On a donc :  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$  ; ce qui nous donne, par identifications des coefficients de  $x^n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n}.$$