

# Séquence XVII – Exercices supplémentaires



## Exercice 36

Déterminer le nombre de façons de partager un ensemble à  $n$  éléments en deux sous-ensembles disjoints non vides.

**Solution de l'exercice 36** Un ensemble à  $n$  éléments possède  $2^n$  sous-ensembles au total. Pour partager en deux sous-ensembles disjoints non vides, on choisit un sous-ensemble  $A$  non vide et non égal à l'ensemble entier, le complémentaire  $\bar{A}$  formant automatiquement le second sous-ensemble.

Il y a  $2^n - 2$  choix pour  $A$  (on enlève l'ensemble vide et l'ensemble total). Cependant, chaque partition est comptée deux fois (une fois pour  $A$  et une fois pour  $\bar{A}$ ). Le nombre de partitions est donc

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$



## Exercice 37

Une suite de dix questions est proposée à un candidat qui doit répondre par OUI ou par NON à ces questions. Combien de réponses différentes peut-on envisager :

- En supposant que toutes les questions reçoivent une réponse ?
- En supposant que certaines questions peuvent être laissées sans réponse ?

## Solution de l'exercice 37

- Pour chaque question, il y a 2 choix possibles (OUI ou NON). Le nombre total de réponses est  $2^{10} = 1024$ .
- Pour chaque question, il y a maintenant 3 choix (OUI, NON, ou pas de réponse). Le nombre total est  $3^{10} = 59\,049$ .



## Exercice 38

Déterminer le nombre minimum d'habitants d'un village pour être sûr qu'il y ait au moins deux personnes avec les mêmes initiales.

**Solution de l'exercice 38** Il y a 26 lettres dans l'alphabet. Le nombre de couples d'initiales possibles est  $26^2 = 676$ .

Donc si on a au moins  $676 + 1 = 677$  habitants, alors au moins deux d'entre eux auront les mêmes initiales.



## Exercice 39

On veut répartir dix boules dans trois urnes.

- Déterminer le nombre total de répartitions possibles sachant que certaines urnes peuvent rester vides.
- Même question, sachant qu'aucune urne ne doit être vide.

## Solution de l'exercice 39

- Chaque boule peut aller dans l'une des 3 urnes. Le nombre de répartitions est  $3^{10} = 59\,049$ .
- On utilise le principe d'inclusion-exclusion. Soit  $A_i$  l'ensemble des répartitions où l'urne  $i$  est vide.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 3 \times 2^{10} - 3 \times 1^{10} + 0 \\ &= 3 \times 1024 - 3 = 3069 \end{aligned}$$

Le nombre de répartitions où aucune urne n'est vide est  $3^{10} - 3069 = 55\,980$ .



## Exercice 40

Une application, définie de l'ensemble  $E$  vers l'ensemble  $F$ , est dite **surjective** si et seulement si tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent dans l'ensemble  $E$ .

- Déterminer le nombre d'applications surjectives de  $E$  vers  $F$ , avec  $\text{card}(E) = n$  et  $\text{card}(F) = 2$ .
- Idem avec  $\text{card}(F) = 3$ .

## Solution de l'exercice 40

- Le nombre total d'applications de  $E$  vers  $F$  est  $2^n$ . Les applications non surjectives sont celles qui n'atteignent qu'un seul élément de  $F$ . Il y en a  $2 \times 1^n = 2$ .  
Le nombre d'applications surjectives est  $2^n - 2$ .
- Le nombre total d'applications est  $3^n$ . Par inclusion-exclusion :

- Applications qui n'atteignent pas l'élément 1 :  $2^n$
- Applications qui n'atteignent pas l'élément 2 :  $2^n$
- Applications qui n'atteignent pas l'élément 3 :  $2^n$
- Applications qui n'atteignent ni 1 ni 2 :  $1^n = 1$
- Applications qui n'atteignent ni 1 ni 3 :  $1^n = 1$
- Applications qui n'atteignent ni 2 ni 3 :  $1^n = 1$
- Applications qui n'atteignent aucun élément : 0

Le nombre d'applications surjectives est

$$3^n - 3 \times 2^n + 3 \times 1 = 3^n - 3 \times 2^n + 3.$$



### Exercice 41

Déterminer combien il existe d'entiers positifs inférieurs à un million et uniquement composés de 1 ou (inclusif) de 2.

**Solution de l'exercice 41** Un million =  $10^6$ . Nous cherchons les nombres composés uniquement des chiffres 1 et 2.

- Nombres à 1 chiffre :  $1, 2 \rightarrow 2$  nombres
- Nombres à 2 chiffres :  $2^2 = 4$  nombres
- Nombres à 3 chiffres :  $2^3 = 8$  nombres
- Nombres à 4 chiffres :  $2^4 = 16$  nombres
- Nombres à 5 chiffres :  $2^5 = 32$  nombres
- Nombres à 6 chiffres :  $2^6 = 64$  nombres

Total :  $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$  nombres.



### Exercice 42

À tout entier strictement positif  $n$ , on associe le nombre  $k(n)$ , qui est le plus petit chiffre de son écriture décimale. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{n=1000}^{9999} k(n).$$

## Solution de l'exercice 42

### Étape 1 : Comprendre le problème

On doit additionner les plus petits chiffres de tous les nombres de 1000 à 9999.

**Exemples :**

- $k(1234) = 1$  (le plus petit chiffre parmi 1, 2, 3, 4)
- $k(5067) = 0$  (le plus petit chiffre parmi 5, 0, 6, 7)
- $k(9999) = 9$  (tous les chiffres sont 9)

### Étape 2 : Organiser le calcul

Plutôt que de calculer  $k(n)$  pour chaque nombre individuellement (ce qui serait très long !), on va compter **combien de nombres ont chaque valeur possible pour  $k(n)$** .

L'idée clé est :

$$\sum_{n=1000}^{9999} k(n) = \sum_{m=0}^9 m \times N_m$$

où  $N_m$  représente le nombre d'entiers  $n$  entre 1000 et 9999 tels que  $k(n) = m$ .

### Étape 3 : Structure d'un nombre de 1000 à 9999

Un tel nombre s'écrit  $\overline{abcd}$  avec quatre chiffres :

- $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (chiffre des milliers, ne peut pas être 0)
- $b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (chaque chiffre a 10 possibilités)

Le plus petit chiffre est :  $k(n) = \min(a, b, c, d)$ .

### Étape 4 : Calculer chaque $N_m$

**Cas  $m = 0$  :**  $k(n) = 0$

Pour que le plus petit chiffre soit 0, il faut :

- Au moins un des chiffres  $b, c$  ou  $d$  égal à 0
- Tous les chiffres  $\geq 0$

$$\begin{aligned} N_0 &= (\text{nombres avec tous chiffres} \geq 0) \\ &\quad - (\text{nombres avec tous chiffres} \geq 1) \\ &= 9 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &\quad - 9 \times 9 \times 9 \times 9 \\ &= 9000 - 6561 \\ &= 2439 \end{aligned}$$

**Cas  $m = 1$  :**  $k(n) = 1$

Pour que le plus petit chiffre soit 1, il faut :

- Au moins un chiffre égal à 1
- Tous les chiffres  $\geq 1$  (pas de 0)

**Méthode par complémentaire :**

$$\begin{aligned} N_1 &= (\text{nombres avec tous chiffres} \geq 1) \\ &\quad - (\text{nombres avec tous chiffres} \geq 2) \\ &= 9 \times 9 \times 9 \times 9 \\ &\quad - 8 \times 9 \times 9 \times 9 \\ &= 6561 - 5832 \\ &= 729 \end{aligned}$$

**Cas  $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  :**  $k(n) = m$

Pour  $2 \leq m \leq 8$ , on applique la même logique :

$$\begin{aligned} N_m &= (\text{nombres avec tous chiffres} \geq m) \\ &\quad - (\text{nombres avec tous chiffres} \geq m+1) \\ &= (10-m) \times 9 \times 9 \times 9 \\ &\quad - (10-m-1) \times 9 \times 9 \times 9 \\ &= [(10-m) - (9-m)] \times 9^3 \\ &= 1 \times 729 \\ &= 729 \end{aligned}$$

**Remarque :** Pour chaque valeur de  $m$  entre 1 et 8, on trouve exactement 729 nombres !

**Cas  $m = 9 : k(n) = 9$**

Pour que le plus petit chiffre soit 9, **tous** les chiffres doivent être égaux à 9.

Il n'y a qu'un seul nombre : 9999.

Donc  $N_9 = 1$ .

## Étape 5 : Calcul de la somme finale

$$\begin{aligned}\sum_{n=1000}^{9999} k(n) &= \sum_{m=0}^9 m \times N_m \\ &= 0 \times 2439 + 1 \times 729 + 2 \times 729 + 3 \times 729 \\ &\quad + 4 \times 729 + 5 \times 729 + 6 \times 729 + 7 \times 729 \\ &\quad + 8 \times 729 + 9 \times 1 \\ &= 0 + 729(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 9 \\ &= 729 \times 36 + 9 \\ &= 26244 + 9 \\ &= \boxed{26253}\end{aligned}$$

### Exercice 43

a) Une grenouille monte un escalier de cinq marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par-dessus une marche (de la marche  $n$  à la marche  $n + 2$ ). Combien a-t-elle de façons distinctes d'arriver au sommet ?

b) Les joueurs Arthur et Béatrice font un tournoi. Le premier qui gagne est celui qui a deux victoires consécutives, ou qui obtient trois victoires en tout. Indiquer, sous forme d'un arbre, toutes les configurations du tournoi.

## Solution de l'exercice 43

1. Notons  $f(n)$  le nombre de façons d'atteindre la marche  $n$ . On a :

- $f(0) = 1$  (position de départ)
- $f(1) = 1$  (un seul saut)
- $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$  pour  $n \geq 2$

Donc :  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$ ,  $f(4) = 5$ ,  $f(5) = 8$ .

La grenouille a 8 façons distinctes d'arriver au sommet.

2. L'arbre des configurations possibles montre tous les chemins jusqu'à la victoire. Les configurations finales possibles sont : AA, BB, ABA, BAB, ABAB, BABA, ABABA, BABAB.

### Exercice 44

Déterminer le nombre de façons de ranger  $n$  personnes en « file indienne », puis en « rond », puis assis autour d'une table (on discutera dans ce dernier cas selon qu'on tient compte ou non de la position par rapport à la table).

## Solution de l'exercice 44

- File indienne :  $n!$  façons
- En rond (sans position fixe par rapport à l'environnement) :  $(n - 1)!$  façons (on fixe une personne et on permute les autres)
- Autour d'une table :
  - Si on tient compte de la position par rapport à la table :  $n!$  façons
  - Si on ne tient pas compte de la position par rapport à la table :  $(n - 1)!$  façons

### Exercice 45

Quatre hommes et quatre femmes s'assoient autour d'une table entourée de huit chaises (on tient compte de leurs positions par rapport à la table).

- Combien existe-t-il de dispositions possibles ?
- Idem sachant que deux personnes du même genre ne peuvent se côtoyer.
- Idem sachant que la personne A ne doit pas être assise à côté de la personne B.

## Solution de l'exercice 45

- 8! dispositions possibles.
- On place d'abord les 4 hommes : 4! façons. Les 4 femmes doivent occuper les 4 places restantes (alternées) : 4! façons.  
Total :  $4! \times 4! = 576$  dispositions.
- Total moins les cas où A et B sont côte à côte.  
Cas où A et B sont côte à côte : on considère AB comme un bloc, on a 7 objets à placer : 7! dispositions. Dans chaque cas, A et B peuvent être permutés :  $2 \times 7!$ .  
Résultat :  $8! - 2 \times 7! = 30\,240$  dispositions.

### Exercice 46

- Combien de mots différents peut-on former en utilisant une et une seule fois chaque lettre du mot ASTRE, indépendamment du sens du mot ?
- Même question pour le mot ASTRES, puis pour le mot ANANAS.
- De combien de façons différentes peut-on écrire le nombre 20 comme somme des nombres 1, 1, 4, 4, 4 et 6 ? Quel rapport avec la question précédente ?

## Solution de l'exercice 46

- ASTRE a 5 lettres distinctes :  $5! = 120$  mots.
- ASTRES a 6 lettres distinctes :  $6! = 720$  mots.  
ANANAS a 6 lettres dont trois A, deux N, un S :

$$\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{720}{12} = 60 \text{ mots.}$$

- On cherche le nombre de permutations de la séquence  $(1,1,4,4,4,6)$  qui contient 2 fois le 1, 3 fois le 4, et 1 fois le 6.

C'est

$$\frac{6!}{2! \times 3! \times 1!} = \frac{720}{12} = 60 \text{ façons.}$$

Le rapport avec b) est que c'est le même problème : permutations avec répétitions.

### Exercice 47

Déterminer le nombre d'applications non bijectives de  $E_n$  vers lui-même, où  $E_n$  est un ensemble de cardinal  $n$ , entier supérieur ou égal à 1.

**Solution de l'exercice 47** Soit  $E_n$  un ensemble fini de cardinal  $n$  (par exemple  $E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ).

**Application :** Une application  $f : E_n \rightarrow E_n$  est une règle qui associe à chaque élément de  $E_n$  un unique élément de  $E_n$ .

**Bijection :** Une application  $f : E_n \rightarrow E_n$  est bijective si elle réalise une correspondance parfaite entre les éléments : chaque élément de  $E_n$  a exactement une image distincte, et chaque élément de  $E_n$  est l'image d'exactly un élément.

Autrement dit, une bijection est une **permutation** des éléments de  $E_n$  : elle réorganise les éléments sans en oublier ni en répéter.

Pour construire une application  $f : E_n \rightarrow E_n$ , il faut choisir l'image de chaque élément.

- Pour le 1<sup>er</sup> élément :  $n$  choix possibles
- Pour le 2<sup>e</sup> élément :  $n$  choix possibles
- :
- Pour le  $n^{\text{ième}}$  élément :  $n$  choix possibles

Par le principe multiplicatif, le nombre total d'applications est :

$$n \times n \times \dots \times n = n^n$$

### Construction d'une bijection :

- Pour l'image du 1<sup>er</sup> élément :  $n$  choix possibles
- Pour l'image du 2<sup>e</sup> élément :  $n - 1$  choix (on ne peut pas réutiliser l'image déjà choisie)
- Pour l'image du 3<sup>e</sup> élément :  $n - 2$  choix

— :

- Pour l'image du dernier élément : 1 seul choix (le dernier élément restant)

Par le principe multiplicatif :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

Une application  $f : E_n \rightarrow E_n$  est **non bijective** si elle ne réalise pas une permutation parfaite.

$$\text{Nombre d'applications non bijectives} = n^n - n!$$

### Exercice 48

- Montrer que  $6!$  peut s'écrire comme le produit de deux factorielles d'entiers supérieurs ou égaux à 2.
- Il en est de même de  $24!$   
Trouver une formule générale.
- Montrer que  $10!$  s'écrit comme le produit de deux, et aussi de trois factorielles d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

## Solution de l'exercice 48

- $6! = 720$ . On vérifie :  $3! \times 5! = 6 \times 120 = 720$ .  
Donc  $6! = 3! \times 5!$ .
- Pour  $24!$ , on peut écrire  $24! = 4! \times 23!$ .  
La formule générale est  $(n!) = n! \times (n! - 1)!$
- $10! = 6! \times 7! = 3! \times 5! \times 7!$ .

### Exercice 49

On choisit deux élèves délégués ayant des régimes différents parmi 5 internes, 8 externes et 10 demi-pensionnaires. De combien de façons peut-on le faire ?

**Solution de l'exercice 49** On doit choisir 2 délégués de régimes différents. Les cas possibles sont :

- 1 interne et 1 externe :  $5 \times 8 = 40$  façons
- 1 interne et 1 demi-pensionnaire :  $5 \times 10 = 50$  façons
- 1 externe et 1 demi-pensionnaire :  $8 \times 10 = 80$  façons

Total :  $40 + 50 + 80 = 170$  façons.

### Exercice 50

Un terrain est divisé en quatre parcelles. Sur chacune, on peut construire une maison choisie parmi cinq types de maison, ou ne rien construire.

a) Quel est le nombre de possibilités de constructions, sachant que les quatre maisons sont construites ?

b) Même question, sachant que les parcelles peuvent rester sans maison.

c) Même question, sachant que les quatre maisons sont construites, et qu'il y en a au moins deux semblables.

### Solution de l'exercice 50

1. Chaque parcelle reçoit une maison parmi 5 types :  $5^4 = 625$  possibilités.

2. Chaque parcelle peut recevoir une maison (5 choix) ou rien (1 choix) :  $6^4 = 1296$  possibilités.

3. Total des cas avec 4 maisons :  $5^4 = 625$ .

Cas avec toutes les maisons différentes :

$$A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$$

Cas avec au moins deux semblables :  $625 - 120 = 505$ .

### Exercice 51

Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 9999 vérifiant :

a)  $n$  est multiple de 5.

b)  $n$  contient au moins un 6.

c)  $n$  est formé de chiffres distincts.

d)  $n$  contient au moins deux chiffres égaux.

### Solution de l'exercice 51

a) Un nombre est multiple de 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.

- Nombres à 1 chiffre :  $5 \rightarrow 1$  nombre
- Nombres à 2 chiffres :  $10, 15, 20, \dots, 95 \rightarrow 9 \times 2 = 18$  nombres
- Nombres à 3 chiffres : premier chiffre (1-9), deuxième (0-9), dernier (0,5)  $\rightarrow 9 \times 10 \times 2 = 180$  nombres
- Nombres à 4 chiffres :  $9 \times 10 \times 10 \times 2 = 1800$  nombres

Total :  $1 + 18 + 180 + 1800 = 1999$  nombres.

b) Complémentaire : nombres ne contenant pas de 6.

- 1 chiffre : 8 nombres (1,2,3,4,5,7,8,9)
- 2 chiffres :  $8 \times 9 = 72$  nombres
- 3 chiffres :  $8 \times 9 \times 9 = 648$  nombres
- 4 chiffres :  $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$  nombres

Total sans 6 :  $8 + 72 + 648 + 5832 = 6560$ .

Avec au moins un 6 :  $9999 - 6560 = 3439$  nombres.

c) Nombres avec chiffres distincts :

- 1 chiffre : 9 nombres
- 2 chiffres :  $9 \times 9 = 81$  nombres
- 3 chiffres :  $9 \times 9 \times 8 = 648$  nombres
- 4 chiffres :  $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$  nombres

Total :  $9 + 81 + 648 + 4536 = 5274$  nombres.

d) Complémentaire de c) :  $9999 - 5274 = 4725$  nombres.

### Exercice 52

On raconte qu'au XVI<sup>e</sup> siècle, un jeu consistant à lancer trois dés et à totaliser les points obtenus, se pratiquait à la cour du Grand-Duc de Toscane. Ce dernier avait remarqué qu'on obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Et cela le surprenait grandement car, disait-il, 10 et 9 points se décomposent pareillement de six façons.

$9 = 1 + 2 + 6$ ,  $9 = 2 + 2 + 5$ ,  $10 = 1 + 3 + 6$ ,  
 $10 = 2 + 4 + 4$

$9 = 1 + 3 + 5$ ,  $9 = 2 + 3 + 4$ ,  $10 = 1 + 4 + 5$ ,  
 $10 = 2 + 3 + 5$

$9 = 1 + 4 + 4$ ,  $9 = 3 + 3 + 3$ ,  $10 = 2 + 2 + 6$ ,  
 $10 = 3 + 3 + 4$

C'est Galilée qui trouva l'explication. À votre tour...

**Solution de l'exercice 52** Le Grand-Duc ne tenait compte que des décompositions en somme, mais pas du nombre de façons d'obtenir chaque décomposition avec des dés distinguables.

Pour la somme 9 :

$$1 + 2 + 6 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$2 + 2 + 5 : \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \text{ façons}$$

$$1 + 3 + 5 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$2 + 3 + 4 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$1 + 4 + 4 : \frac{3!}{1! \times 2!} = 3 \text{ façons}$$

$$3 + 3 + 3 : \frac{3!}{3!} = 1 \text{ façon}$$

Total pour 9 :  $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 1 = 25$  façons.

Pour la somme 10 :

$$1 + 3 + 6 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$2 + 4 + 4 : \frac{3!}{1! \times 2!} = 3 \text{ façons}$$

$$1 + 4 + 5 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$2 + 3 + 5 : \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \text{ façons}$$

$$2 + 2 + 6 : \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \text{ façons}$$

$$3 + 3 + 4 : \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \text{ façons}$$

Total pour 10 :  $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$  façons.

Donc 10 est effectivement plus probable que 9.

### Exercice 53

Combien de poignées de mains se donnent  $n$  personnes sachant que deux quelconques d'entre elles se serrent une seule fois la main ?

**Solution de l'exercice 53** Chaque poignée de main implique exactement 2 personnes. Il s'agit de choisir 2 personnes parmi  $n$ .

Le nombre de poignées de mains est

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

### Exercice 54

À la fin d'une soirée, tout le monde s'en va, par couples. Cent douze poignées de mains sont ainsi échangées. Combien y avait-il de personnes dans cette soirée, sachant que chacun salue tout le monde sauf son conjoint ?

**Solution de l'exercice 54 Méthode 1 :** soit  $2n$  le nombre de personnes (puisqu'elles partent par couples). Il y a  $n$  couples.

Chaque personne salue  $2n - 2$  personnes (tous sauf elle-même et son conjoint).

Le nombre total de poignées de mains est

$$\frac{2n(2n-2)}{2} = n(2n-2) = 2n^2 - 2n.$$

On a :  $2n^2 - 2n = 112$ , soit  $2n^2 - 2n - 112 = 0$ , d'où  $n^2 - n - 56 = 0$ .

En résolvant :  $n = \frac{1+\sqrt{1+224}}{2} = \frac{1+15}{2} = 8$ .

Il y avait  $2 \times 8 = 16$  personnes.

**Méthode 2 :** Soit  $m$  le nombre de personnes. Il y a  $m/2$  couples. Chaque personne serre la main à toutes les autres sauf son conjoint, soit  $m - 2$  poignées de main

par personne. Mais chaque poignée de main est comptée deux fois, donc :

$$\frac{m(m-2)}{2} = 112$$

$$m(m-2) = 224$$

$$m^2 - 2m - 224 = 0$$

En résolvant :  $m = 16$  (la solution négative étant écartée).

Il y avait donc 16 personnes dans cette soirée.

### Exercice 55

Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone à  $n$  côtés, sachant qu'une diagonale est un segment joignant deux sommets distincts non consécutifs.

**Solution de l'exercice 55** Un polygone à  $n$  côtés a  $n$  sommets.

Le nombre total de segments joignant deux sommets est  $\binom{n}{2}$ .

Le nombre de côtés est  $n$ .

Le nombre de diagonales est

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

### Exercice 56

On considère un hexagone régulier ( $ABCDEF$ ).

- Déterminer le nombre de triangles dont les trois sommets sont parmi les six sommets de l'hexagone.
- Déterminer parmi ces derniers ceux qui sont :
  - équilatéraux
  - rectangles
  - isocèles non équilatéraux

### Solution de l'exercice 56

- Le nombre de triangles est le nombre de façons de choisir 3 sommets parmi 6 :

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

- (a) Triangles équilatéraux : Dans un hexagone régulier, les triangles équilatéraux sont formés par des sommets alternés. Il y en a 2 : ACE et BDF.  
(b) Triangles rectangles : Les triangles rectangles sont ceux dont un côté est un diamètre de l'hexagone. Il y en a 6.  
(c) Triangles isocèles non équilatéraux : par élimination, il y en a  $20 - 2 - 6 = 12$ .



### Exercice 57

Déterminer le nombre de combinaisons au Loto (tirage de cinq nombres parmi 49, et d'un nombre complémentaire parmi les restants).

### Solution de l'exercice 57

$$\begin{aligned}\binom{49}{5} \times \binom{44}{1} &= \binom{49}{5} \times 44 \\ &= \frac{49!}{5! \times 44!} \times 44 \\ &= 1\,906\,884 \times 44 \\ &= 83\,902\,896\end{aligned}$$



### Exercice 58

Combien y a-t-il de distributions de 18 cartes d'un jeu de tarot pour 4 joueurs, sachant qu'il y a 78 cartes et qu'il y aura donc un « talon » de 6 cartes ?

**Solution de l'exercice 58** Il faut d'abord choisir 6 cartes pour le talon parmi 78, puis distribuer les 72 cartes restantes en 4 paquets de 18 cartes chacun :

$$\binom{78}{6} \times \frac{72!}{(18!)^4}$$



### Exercice 59

Le jeu de dominos est constitué de rectangles sur lesquels sont inscrits deux chiffres de 0 à 6 (sans ordre, égaux ou distincts).

- Combien y a-t-il de dominos différents ?
- Combien y a-t-il de distributions de sept dominos pour quatre joueurs ?

### Solution de l'exercice 59

- Il s'agit de choisir 2 chiffres parmi 7 (de 0 à 6) avec répétition possible et sans ordre :

$$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$$

- Avec 28 dominos et 7 dominos par joueur pour 4 joueurs, il faut distribuer tous les dominos :

$$\frac{28!}{(7!)^4}$$



### Exercice 60

Le « 421 » est un jeu où on lance trois dés et où on s'intéresse au nombre formé par les trois chiffres obtenus, indépendamment de l'ordre. Déterminer le nombre de résultats possibles et en faire la liste.

**Solution de l'exercice 60** Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de 3 éléments parmi 6 (faces 1 à 6) :

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

Liste des résultats (en notation  $abc$  où  $a \geq b \geq c$ ) :

666, 665, 664, 663, 662, 661, 655, 654, 653, 652, 651, 644, 643, 642, 641, 633, 632, 631, 622, 621, 611, 555, 554, 553, 552, 551, 544, 543, 542, 541, 533, 532, 531, 522, 521, 511, 444, 443, 442, 441, 433, 432, 431, 422, 421, 411, 333, 332, 331, 322, 321, 311, 222, 221, 211, 111.



### Exercice 61

On compose au hasard sur le clavier de smartphone un numéro de huit chiffres. Déterminer le nombre de numéros différents :

- avec 8 chiffres pairs.
- avec 3 zéros exactement.
- dont la somme des chiffres est 64.
- avec au moins 3 fois le chiffre 1.

### Solution de l'exercice 61

- Il y a 5 chiffres pairs (0, 2, 4, 6, 8), donc  $5^8 = 390\,625$  numéros.
- Il faut choisir 3 positions parmi 8 pour les zéros, et compléter les 5 autres avec des chiffres de 1 à 9 :

$$\binom{8}{3} \times 9^5 = 56 \times 59\,049 = 3\,306\,744$$

- La somme maximale avec 8 chiffres est  $8 \times 9 = 72$ . Il faut donc répartir 64 unités sur 8 positions avec des chiffres de 0 à 9.
- On utilise le principe d'inclusion-exclusion. Soit  $A_i$  l'ensemble des numéros ayant au moins  $i$  fois le chiffre 1.



### Exercice 62

Dans une urne se trouvent : six boules blanches, numérotées de 1 à 6 et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5. On tire simultanément quatre boules.

- Quel est le nombre de façons d'avoir :
  - quatre boules blanches.
  - au moins une boule rouge.
  - une blanche et un numéro 3 exactement.
- Mêmes questions en tirant successivement et sans remise.

**Solution de l'exercice 62** Il y a 11 boules au total.

- Tirage simultané :
  - $\binom{6}{4} = 15$
  - $\binom{11}{4} - \binom{6}{4} = 330 - 15 = 315$
  - Il faut distinguer les cas selon la provenance du numéro 3 (blanche ou rouge).
- Tirage successif : Les résultats sont les mêmes car l'ordre n'intervient pas dans les conditions données.

### Exercice 63

Une urne contient douze boules :

- cinq sont blanches et numérotées 1, 2, 3, 4 et 5
- quatre sont noires et numérotées 1, 2, 3 et 4
- trois sont rouges et numérotées 1, 2 et 3

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

Calculer le nombre de tirages possibles :

- en tout.
- contenant quatre boules de même couleur.
- contenant au moins une boule blanche.
- contenant quatre numéros distincts deux à deux.

### Solution de l'exercice 63

- $\binom{12}{4} = 495$
- Seules les blanches permettent 4 boules de même couleur :  $\binom{5}{4} = 5$
- $\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 495 - 35 = 460$
- Il faut 4 numéros distincts parmi  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pour chaque choix de 4 numéros, on compte les façons de les obtenir.

### Exercice 64

Un joueur de bridge reçoit une « main » de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

Déterminer le nombre de mains :

- en tout.
- contenant exactement un cœur.
- contenant exactement deux cœurs.
- contenant au moins deux cœurs.
- contenant au moins un cœur mais aucun pique.

### Solution de l'exercice 64

- $\binom{52}{13}$
- $\binom{13}{1} \times \binom{39}{12}$
- $\binom{13}{2} \times \binom{39}{11}$
- $\binom{52}{13} - \binom{39}{13} - \binom{13}{1} \times \binom{39}{12}$
- $\binom{26}{13} - \binom{13}{13} = \binom{26}{13} - 1$

### Exercice 65

Dans un sac se trouvent : cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément trois jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles :

- en tout.
- ne contenant que des jetons verts.
- ne contenant que des jetons ayant un numéro pair.
- contenant au moins deux jetons verts.
- contenant exactement un jeton vert et exactement un jeton numéroté 2.
- tels que les trois jetons aient même couleur.
- tels que la somme des trois numéros sur les jetons vaille 13.

**Solution de l'exercice 65** Il y a 9 jetons au total.

- $\binom{9}{3} = 84$
- $\binom{5}{3} = 10$
- Jetons pairs : 2, 4 (verts) et 2, 4 (rouges), soit 4 jetons.  
 $\binom{4}{3} = 4$
- Au moins 2 verts :

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{3} = 10 \times 4 + 10 = 50$$

- Cas complexe nécessitant une analyse détaillée selon les jetons numérotés 2.
- $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$
- Il faut énumérer les combinaisons de 3 numéros donnant une somme de 13.

### Exercice 66

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$  des nombres réels.

Développer  $(2a + b)^6$  et  $(3x - 2y)^5$ .

## Solution de l'exercice 66

$$\begin{aligned}(2a+b)^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2a)^{6-k} b^k \\&= \binom{6}{0} (2a)^6 + \binom{6}{1} (2a)^5 b + \binom{6}{2} (2a)^4 b^2 \\&\quad + \cdots + \binom{6}{6} b^6 \\&= 64a^6 + 6 \times 32a^5 b + 15 \times 16a^4 b^2 \\&\quad + 20 \times 8a^3 b^3 + 15 \times 4a^2 b^4 \\&\quad + 6 \times 2ab^5 + b^6 \\&= 64a^6 + 192a^5 b + 240a^4 b^2 \\&\quad + 160a^3 b^3 + 60a^2 b^4 + 12ab^5 + b^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3x-2y)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (3x)^{5-k} (-2y)^k \\&= 243x^5 - 5 \times 81x^4 \times 2y \\&\quad + 10 \times 27x^3 \times 4y^2 - 10 \times 9x^2 \times 8y^3 \\&\quad + 5 \times 3x \times 16y^4 - 32y^5 \\&= 243x^5 - 810x^4 y + 1080x^3 y^2 \\&\quad - 720x^2 y^3 + 240xy^4 - 32y^5\end{aligned}$$

## Exercice 67

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  avec  $0 \leq p \leq n$  :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

1. Écrire la définition de  $\binom{n}{p}$  en utilisant les factorielles.
2. Écrire la définition de  $\binom{n}{n-p}$  en utilisant les factorielles.
3. Simplifier l'expression précédente et conclure.

**Solution de l'exercice 67** Par définition du coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

De même :

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)! \times (n-(n-p))!} \\&= \frac{n!}{(n-p)! \times p!} \\&= \frac{n!}{p! \times (n-p)!}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

## Exercice 68

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour tous entiers naturels  $n \geq 1$  et  $p$  avec  $1 \leq p \leq n$  :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

1. Écrire les définitions factorielles de  $\binom{n-1}{p-1}$  et  $\binom{n-1}{p}$ .
2. Calculer leur somme en mettant au même dénominateur.
3. Factoriser le numérateur et simplifier les expressions pour faire apparaître  $n!$ .
4. Conclure.

**Solution de l'exercice 68** Par définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times (n-p)!} \\ \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{p! \times (n-1-p)!}\end{aligned}$$

Calculons leur somme en mettant au même dénominateur  $p! \times (n-p)!$  :

$$\begin{aligned}&\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \\&= \frac{(n-1)!}{(p-1)! \times (n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p! \times (n-1-p)!} \\&= \frac{p \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\&= \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\&= \frac{[p + (n-p)] \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\&= \frac{n \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \\&= \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \\&= \binom{n}{p}\end{aligned}$$