

Séquence XVII – Dénombrements – p -listes et arrangements

p -listes

Exercice XVII.1

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice XVII.2

Le code d'une carte bleu est un entier à quatre chiffres, le premier pouvant être nul. Combien y a-t-il de codes possibles pour une carte bleue ?

Exercice XVII.3

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de la même façon et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice XVII.4

Pour son vélo, Éric possède un antivol à code qui est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9. Mais Éric a oublié son code !

- Combien de combinaisons doit-il essayer dans le pire des cas avant de retrouver la bonne ?
- Même question en supposant qu'Éric se souvient que son code
 - commence par le chiffre 8
 - se termine par un chiffre pair
 - ne contient que des chiffres pairs
 - ne contient que des chiffres impairs
 - contient au moins un chiffre pair
 - contient exactement un chiffre pair

Exercice XVII.5

Au concours Kangourou, il y a 24 questions comportant chacune une et une seule réponse exacte parmi A , B , C , D et E .

- Combien y a-t-il de grilles réponses distinctes ?
- Combien y a-t-il de grilles réponses comportant exactement une bonne réponse ?
- Combien y a-t-il de grilles réponses comportant au moins une bonne réponse ?

Arrangements

Exercice XVII.6

Calculer A_7^2 et A_5^5 à la main, puis vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

Exercice XVII.7

À l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze.

Combien y-a-t-il de podiums possibles (sans ex-æquo, et avant la compétition, bien sûr...) ?

Exercice XVII.8

Dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il d'arrivées possibles sans ex-æquo des trois premiers (le « tiercé gagnant ») ?

Exercice XVII.9

Pour cet exercice, on rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui comporte les mêmes lettres que celui-ci. Par exemple : IMAGE et MAGIE. Un mot est considéré comme sa propre anagramme.

- Quel est le nombre d'anagrammes (ayant ou non un sens) du mot MATHS ?
- Quel est le nombre d'anagrammes (ayant ou non un sens) du nom PASCAL ?
- Combien peut-on former de mots de trois lettres (ayant ou non un sens) en utilisant une seule fois les lettres du mot FACTEUR ? Même question si elles sont éventuellement répétées ?

Exercice XVII.10

Dans une ville de 32 000 habitants, le conseil municipal est composé de 39 membres. Les conseillers municipaux sont élus sur des listes de 39 membres, avec alternance Homme/Femme.

Un parti politique dispose de 40 candidates et 60 candidats.

Il est déjà décidé que la tête de liste est Mme A , que le second de la liste sera obligatoirement M. B , suivi de Mme C , M. D et enfin Mme E . Les autres conseillers municipaux peuvent être choisis parmi les candidat(e)s disponibles.

Combien y a-t-il de listes possibles ?

Séquence XVII – Dénombrements – combinaisons

Exercice XVII.11

Il y a 24 élèves dans une classe de terminale. De combien de manières peut-on choisir des binômes de délégués (sans leurs suppléants) ?

Exercice XVII.12

Calculer à la main $\binom{8}{5}$, puis avec la calculatrice.

Exercice XVII.13

Un tirage du Loto est une combinaison de 6 numéros choisis parmi 49, ainsi qu'un « numéro chance », entre 1 et 5.

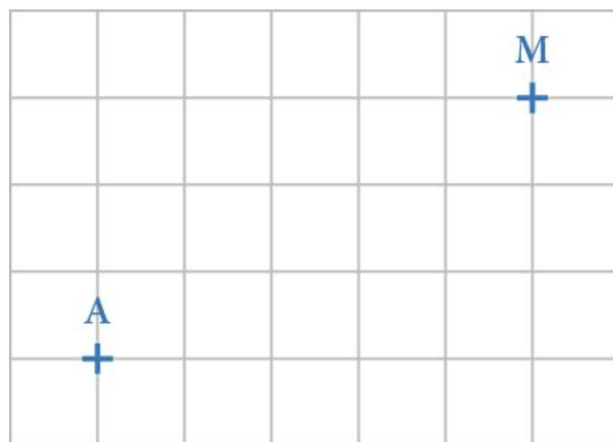
Combien y a-t-il de tirages possibles au Loto ?

Exercice XVII.14

Au concours Kangourou, combien y a-t-il de grilles avec exactement 5 réponses correctes ? (les règles du Kangourou sont rappelés dans l'exercice XVII.5)

Exercice XVII.15

Une araignée se trouve en A sur une toile aux motifs carrés. Une mouche est immobilisée par la toile, au point M .



L'araignée souhaite attraper la mouche mais ne peut se déplacer que le long des filins de sa toile, vers la droite et vers le haut.

Combien de chemins différents peut prendre l'araignée pour atteindre la mouche ?

Séquence XVII – Dénombrements – exercices variés

Exercice XVII.16

Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on constituer de « mains » de 8 cartes ?

Exercice XVII.17

On appelle « mot » une suite de deux points et cinq traits. Par exemple : $- \bullet - \bullet - - -$. Combien de tels mots peut-on écrire ?

Exercice XVII.18

Dix-huit personnes se rencontrent et chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de main échangées ?

Exercice XVII.19

On réunit 5 personnes qui écrivent les unes après les autres leur mois de naissance sur une même feuille. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Exercice XVII.20

Une association de 20 membres veut constituer un bureau formé de trois personnes : un(e) président(e), un(e) secrétaire, un(e) trésorier(e). Combien de bureaux différents peut-on constituer ?

Exercice XVII.21

Sur un damier de 4×4 cases, on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

1. On suppose que les jetons sont de quatre couleurs différentes. De combien de façons peut-on les disposer ?
2. On suppose que les jetons sont identiques. De combien de façons peut-on les disposer ?

Exercice XVII.22

Dans une classe composée de 17 filles et de 15 garçons, on veut choisir deux délégués.

1. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?
2. On veut un délégué garçon et une déléguée fille. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?

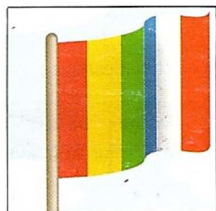
Exercice XVII.23

L'accès à un immeuble est commandée par un appareil à digicode. Le code comporte cinq éléments, trois chiffres et deux lettres.

1. On suppose que le code est formé (dans cet ordre) de trois chiffres puis de deux lettres.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes commencent par trois chiffres identiques ?
 - (c) Combien de codes ont trois chiffres différents ?
2. On suppose maintenant que le code est formé de trois chiffres et de deux lettres, pas forcément dans cet ordre.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes comportent deux lettres identiques ?

Exercice XVII.24

On veut colorier les six bandes du drapeau, en utilisant 5 couleurs au maximum et de façon que deux bandes voisines n'aient pas la même couleur.



Combien y a-t-il de drapeaux possibles ?

Exercice XVII.25

En informatique, on appelle octet une liste de huit éléments pris dans l'ensemble $\{0; 1\}$. Par exemple : 01001100 ou 11100011 sont des octets.

1. Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 et se terminant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets comportant exactement quatre 1 ?

Exercice XVII.26

Un QCM est constitué de cinq questions. Pour chacune des cinq questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Les réponses sont cochées sur une grille-réponse.

1. Combien y a-t-il de grilles réponses possibles ?
2. Combien y a-t-il de grilles avec toutes les réponses correctes ?
3. Combien y a-t-il de grilles avec exactement quatre réponses correctes ?
4. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois réponses correctes ?

Exercice XVII.27

Un caractère de l'écriture en Braille destiné aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci-dessous :

o o
o o
o o

1. Combien de caractères Braille peut-on concevoir ?
2. Dénombrer les caractères Braille à quatre points.
3. Dénombrer les caractères Braille formés de quatre points qui soient les sommets d'un rectangle.

Séquence XVII – Propriétés des coefficients binomiaux

Exercice XVII.28

Développer :

1. $(2 + x)^8$
2. $(1 - 2x)^7$
3. À l'aide de la formule du binôme, démontrer que, pour tout entier naturel n , 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4.

Exercice XVII.29

On considère une grille de mots croisés de 5×5 cases. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul qu'il y a autant de grilles avec 5 cases noires que de grilles avec 20 cases noires ?

Exercice XVII.30

n est un entier naturel. On note

$$u_n = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right)^n$$

Démontrer à l'aide de la formule du binôme que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier.

Exercice XVII.31

Pour tout réel x et tout entier naturel n , on pose

$$f(x) = (1 + x)^n$$

1. En développant $f(x)$, montrer que :

$$\begin{aligned} n(1 + x)^{n-1} &= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 \\ &\quad + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} \end{aligned}$$

2. Calculer

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Exercice XVII.32

En utilisant le développement de $(1 + x)^{2n}$, démontrer que :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice XVII.33

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On extrait simultanément n boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages ?
2. Soit $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que le nombre de tirages contenant exactement p boules blanches est : $\binom{n}{p}^2$.
3. En déduire la somme :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Exercice XVII.34

Deux joueurs participent à un tournoi de tennis. Le premier tour de ce tournoi va mettre aux prises ces joueurs au cours de n rencontres.

Démontrer qu'il y a $\frac{(2n)!}{2^n \times n!}$ façons d'organiser ce premier tour.

Exercice XVII.35

La formule de Vandermonde ^a

On considère une urne contenant m boules blanches et n boules noires m et n étant deux entiers naturels non nuls.

1. Pour p entier naturel, combien l'urne contient-elle de parties à p boules ?
2. Combien de parties à p boules de l'urne contiennent :
 - exactement 0 boule blanche et p boules noires ?
 - exactement 1 boule blanche et $p - 1$ boules noires ?
 - exactement 2 boules blanches et $p - 2$ boules noires ?
 - ...
 - exactement p boules blanches et 0 boule noire ?
3. Montrer la Formule de Vandermonde :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

^a. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1^{er} janvier 1796, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier.

Séquence XVII – Exercices supplémentaires

Exercice XVII.36

Déterminer le nombre de façons de partager un ensemble à n éléments en deux sous-ensembles disjoints non vides.

Exercice XVII.37

Une suite de dix questions est proposée à un candidat qui doit répondre par OUI ou par NON à ces questions. Combien de réponses différentes peut-on envisager :

- a) En supposant que toutes les questions reçoivent une réponse ?
- b) En supposant que certaines questions peuvent être laissées sans réponse ?

Exercice XVII.38

Déterminer le nombre minimum d'habitants d'un village pour être sûr qu'il y ait au moins deux personnes avec les mêmes initiales.

Exercice XVII.39

- On veut répartir 10 boules dans trois urnes.
- a) Déterminer le nombre total de répartitions possibles sachant que certaines urnes peuvent rester vides.
 - b) Même question, sachant qu'aucune urne ne doit être vide.

Exercice XVII.40

Une application, définie de l'ensemble E vers l'ensemble F , est dite **surjective** si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans l'ensemble E .

- a) Déterminer le nombre d'applications surjectives de E vers F , avec $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = 2$.
- b) Idem avec $\text{card}(F) = 3$.

Exercice XVII.41

Déterminer combien il existe d'entiers positifs inférieurs à un million et uniquement composés de 1 ou (inclusif) de 2.

Exercice XVII.42

À tout entier strictement positif n , on associe le nombre $k(n)$, qui est le plus petit chiffre de son écriture décimale. Calculer la somme suivante : $\sum_{n=1000}^{9999} k(n)$.

Exercice XVII.43

- a) Une grenouille monte un escalier de cinq marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par-dessus une marche (de la marche n à la marche $n + 2$). Combien a-t-elle de façons distinctes d'arriver au sommet ?
- b) Les joueurs Arthur et Béatrice font un tournoi. Le premier qui gagne est celui qui a deux victoires consécutives, ou qui obtient trois victoires en tout. Indiquer, sous forme d'un arbre, toutes les configurations du tournoi.

Exercice XVII.44

Déterminer le nombre de façons de ranger n personnes en « file indienne », puis en « rond », puis assis autour d'une table (on discutera dans ce dernier cas selon qu'on tient compte ou non de la position par rapport à la table).

Exercice XVII.45

- Quatre hommes et quatre femmes s'assoient autour d'une table entourée de huit chaises (on tient compte de leurs positions par rapport à la table).
- a) Combien existe-t-il de dispositions possibles ?
 - b) Idem sachant que deux personnes du même genre ne peuvent se côtoyer.
 - c) Idem sachant que la personne A ne doit pas être assise à côté de la personne B.

Exercice XVII.46

- a) Combien de mots différents peut-on former en utilisant une et une seule fois chaque lettre du mot ASTRE, indépendamment du sens du mot ?
- b) Même question pour le mot ASTRES, puis pour le mot ANANAS.
- c) De combien de façons différentes peut-on écrire le nombre 20 comme somme des nombres 1, 1, 4, 4, 4 et 6 ? Quel rapport avec la question précédente ?

Exercice XVII.47

Déterminer le nombre d'applications non bijectives de E_n vers lui-même, où E_n est un ensemble de cardinal n , entier supérieur ou égal à 1.

Exercice XVII.48

- a) Montrer que $6!$ peut s'écrire comme le produit de deux factorielles d'entiers supérieurs ou égaux à 2.
- b) Il en est de même de $24!$
Trouver une formule générale.
- c) Montrer que $10!$ s'écrit comme le produit de deux, et aussi de trois factorielles d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

Exercice XVII.49

On choisit deux élèves délégués ayant des régimes différents parmi 5 internes, 8 externes et 10 demi-pensionnaires. De combien de façons peut-on le faire ?

Exercice XVII.50

- Un terrain est divisé en quatre parcelles. Sur chacune, on peut construire une maison choisie parmi cinq types de maison, ou ne rien construire.
- a) Quel est le nombre de possibilités de constructions, sachant que les quatre maisons sont construites ?
 - b) Même question, sachant que les parcelles peuvent rester sans maison.
 - c) Même question, sachant que les quatre maisons sont construites, et qu'il y en a au moins deux semblables.

Exercice XVII.51

- Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 9999 vérifiant :
- a) n est multiple de 5.
 - b) n contient au moins un 6.
 - c) n est formé de chiffres distincts.
 - d) n contient au moins deux chiffres égaux.

Exercice XVII.52

On raconte qu'au XVI^e siècle, un jeu consistant à lancer trois dés et à totaliser les points obtenus, se pratiquait à la cour du Grand-Duc de Toscane. Ce dernier avait remarqué qu'on obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Et cela le surprenait grandement car, disait-il, 10 et 9 points se décomposent pareillement de six façons.

$9 = 1 + 2 + 6$, $9 = 2 + 2 + 5$, $10 = 1 + 3 + 6$,
 $10 = 2 + 4 + 4$
 $9 = 1 + 3 + 5$, $9 = 2 + 3 + 4$, $10 = 1 + 4 + 5$,
 $10 = 2 + 3 + 5$
 $9 = 1 + 4 + 4$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 2 + 2 + 6$,
 $10 = 3 + 3 + 4$

C'est Galilée qui trouva l'explication. À votre tour...

Exercice XVII.53

Combien de poignées de mains se donnent n personnes sachant que deux quelconques d'entre elles se serrent une seule fois la main ?

Exercice XVII.54

À la fin d'une soirée, tout le monde s'en va, par couples. Cent douze poignées de mains sont ainsi échangées. Combien y avait-il de personnes dans cette soirée, sachant que chacun salue tout le monde sauf son conjoint ?

Exercice XVII.55

Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, sachant qu'une diagonale est un segment joignant deux sommets distincts non consécutifs.

Exercice XVII.56

- On considère un hexagone régulier ($ABCDEF$).
1. Déterminer le nombre de triangles dont les trois sommets sont parmi les six sommets de l'hexagone.
 2. Déterminer parmi ces derniers ceux qui sont :
 - (a) équilatéraux
 - (b) rectangles
 - (c) isocèles non équilatéraux

Exercice XVII.57

Déterminer le nombre de combinaisons au Loto (tirage de cinq nombres parmi 49, et d'un nombre complémentaire parmi les restants).

Exercice XVII.58

Combien y a-t-il de distributions de 18 cartes d'un jeu de tarot pour 4 joueurs, sachant qu'il y a 78 cartes et qu'il y aura donc un « talon » de 6 cartes ?

Exercice XVII.59

- Le jeu de dominos est constitué de rectangles sur lesquels sont inscrits deux chiffres de 0 à 6 (sans ordre, égaux ou distincts).
1. Combien y a-t-il de dominos différents ?
 2. Combien y a-t-il de distributions de sept dominos pour quatre joueurs ?

Exercice XVII.60

Le « 421 » est un jeu où on lance trois dés et où on s'intéresse au nombre formé par les trois chiffres obtenus, indépendamment de l'ordre. Déterminer le nombre de résultats possibles et en faire la liste.

Exercice XVII.61

On compose au hasard sur le clavier de smartphone un numéro de huit chiffres. Déterminer le nombre de numéros différents :

1. avec 8 chiffres pairs.
2. avec 3 zéros exactement.
3. dont la somme des chiffres est 64.
4. avec au moins 3 fois le chiffre 1.

Exercice XVII.62

Dans une urne se trouvent : six boules blanches, numérotées de 1 à 6 et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5. On tire simultanément quatre boules.

1. Quel est le nombre de façons d'avoir :
 - (a) quatre boules blanches.
 - (b) au moins une boule rouge.
 - (c) une blanche et un numéro 3 exactement.
2. Mêmes questions en tirant successivement et sans remise.

Exercice XVII.63

Une urne contient douze boules :

- cinq sont blanches et numérotées 1, 2, 3, 4 et 5
- quatre sont noires et numérotées 1, 2, 3 et 4
- trois sont rouges et numérotées 1, 2 et 3

On tire simultanément quatre boules de l'urne. Calculer le nombre de tirages possibles :

1. en tout.
2. contenant quatre boules de même couleur.
3. contenant au moins une boule blanche.
4. contenant quatre numéros distincts deux à deux.

Exercice XVII.64

Un joueur de bridge reçoit une « main » de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Déterminer le nombre de mains :

1. en tout.
2. contenant exactement un cœur.
3. contenant exactement deux cœurs.
4. contenant au moins deux cœurs.
5. contenant au moins un cœur mais aucun pique.

Exercice XVII.65

Dans un sac se trouvent : cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément trois jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles :

1. en tout.
2. ne contenant que des jetons verts.
3. ne contenant que des jetons ayant un numéro pair.
4. contenant au moins deux jetons verts.
5. contenant exactement un jeton vert et exactement un jeton numéroté 2.
6. tels que les trois jetons aient même couleur.
7. tels que la somme des trois numéros sur les jetons vaille 13.

Exercice XVII.66

Soient a , b , x et y des nombres réels. Développer $(2a + b)^6$ et $(3x - 2y)^5$.

Exercice XVII.67 Preuve algébrique de la formule de symétrie

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour tous entiers naturels n et p avec $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

1. Écrire la définition de $\binom{n}{p}$ en utilisant les factorielles.
2. Écrire la définition de $\binom{n}{n-p}$ en utilisant les factorielles.
3. Simplifier l'expression précédente et conclure.

Exercice XVII.68 Preuve algébrique de la formule de Pascal

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour tous entiers naturels $n \geq 1$ et p avec $1 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

1. Écrire les définitions factorielles de $\binom{n-1}{p-1}$ et $\binom{n-1}{p}$.
2. Calculer leur somme en mettant au même dénominateur.
3. Factoriser le numérateur et simplifier les expressions pour faire apparaître $n!$.
4. Conclure.

Séquence XVII – Exercices plus difficiles

Exercice XVII.69

On définit une relation $\mathcal{R}$ entre les éléments de $E = \{a, b, c\}$ par un dessin, nommé **graphe**, liant ou non les éléments de E . (Un exemple de graphe : a vers b , b vers a , c vers a et c vers c)

1. Montrer qu'on peut ainsi définir 512 graphes.
2. Une **relation** est dite **réflexive** si et seulement si, pour tout élément x de E , $x\mathcal{R}x$. Montrer qu'il y a 64 graphes correspondant à une relation réflexive.
3. Une relation est dite **symétrique** si et seulement si, pour tout couple $(x; y)$ de E^2 , $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Montrer qu'il existe 64 graphes correspondant à une relation symétrique.
4. Déterminer le nombre de graphes correspondant à une relation à la fois réflexive et symétrique.

Exercice XVII.70

Dans le nombre à huit chiffres $19xx95xx$, on doit remplacer les x par des chiffres pour que le nombre obtenu soit divisible par 90.

Déterminer combien de nombres différents on peut fabriquer pour satisfaire à cette condition.

Exercice XVII.71

Quatre personnes, Aline, Bernard, Charlotte et Denis, veulent se partager 10 pommes identiques, chacun en ayant au moins une. De combien de façons le partage peut-il se faire ? (On ne s'intéresse qu'au nombre de pommes de chacun.)

Exercice XVII.72

Déterminer le nombre de façons de partager un ensemble à $p + q$ éléments en deux sous-ensembles disjoints, l'un à p éléments et l'autre à q éléments.

Exercice XVII.73

Un damier carré comporte 25 cases. Déterminer le nombre de façons de placer 5 pions identiques de telle sorte qu'il y en ait exactement un par ligne et un par colonne.

Exercice XVII.74

De combien de façons peut-on placer trois tours identiques sur un échiquier carré de 64 cases pour qu'aucune des tours ne soit en prise entre elles ?

Exercice XVII.75

Montrer les formules suivantes (plusieurs démonstrations possibles).

1. Pour tout couple $(n; p)$ d'entiers tels que $n > p$,

$$A_n^p = A_{n-1}^p + p \times A_{n-1}^{p-1}$$

2. Pour tout entier $n > 0$,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Exercice XVII.76

Formule de Leibniz :

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I , alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où $f^{(k)}$ est la dérivée k -ième de f .

(Par convention, $f^{(0)} = f$).

Exercice XVII.77

Prouver que, parmi les $n!$ permutations des éléments de l'ensemble E_n , il y en a $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ qui sont totalement désordonnées, i.e. pour lesquelles, pour tout entier k entre 1 et n , $f(k) \neq k$.

