

Dénombrement

1. p -listes (ou p -uplets)

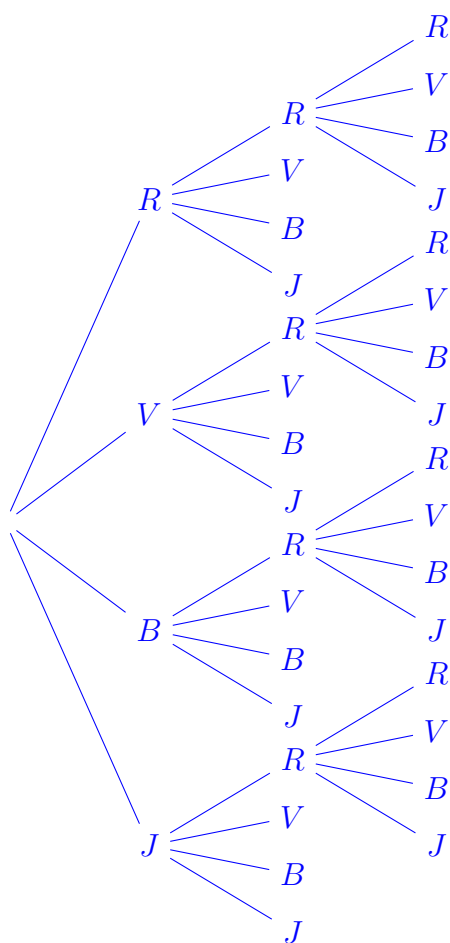
Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard **successivement** trois boules (c'est-à-dire en tenant compte de l'ordre de sortie des boules) avec remise de la boule tirée à chaque fois dans l'urne (donc avec répétition possible), en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

Les issues sont donc des triplets, des listes ordonnées, avec répétition possible. Par exemple :

$(J ; B ; R)$ ou $(R ; B ; B)$

sont des éléments de Ω . On cherche à déterminer $\text{card}(\Omega)$. Pour cela, on peut utiliser un arbre :



On obtient $\text{card}(\Omega) = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

■ DÉFINITION :

Une liste ordonnée **avec** répétition possible de p éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble E s'appelle une **p -liste** (ou un **p -uplet**) d'éléments de E .

Remarque :

- Un 2-uplet est appelé un **couple** .
- Un 3-uplet est appelé un **triplet** .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre de p -listes d'un ensemble E à n éléments est :

$$n^p$$

Exemple :

On lance dix fois une pièce équilibrée. Le nombre de mots possibles à dix lettres, formés avec les lettres P et F , est

$$2^{10} = 1024.$$

Remarque : On dit que le principe est **multiplicatif**.

Exemple :

On considère deux lancers successifs d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Le nombre de couples de résultats de ces lancers est 6×6 , car il y a 6 possibilités pour le premier lancer et 6 possibilités pour le deuxième. On obtient 6^2 , c'est-à-dire 36, ce qui revient à prendre 2 éléments (les deux résultats) dans un ensemble de 6 chiffres (les nombres inscrits sur les faces du dé).

Exemple :

Le code d'accès aux services d'une banque à distance s'effectue grâce à un identifiant de huit chiffres choisis entre 0 et 9, suivi, si l'identifiant est correct, d'un second code à 8 chiffres choisis entre 0 et 9. Ces chiffres peuvent être répétés.

Combien y a-t-il de codes d'accès possibles globalement ?

On prend d'abord 8 chiffres dans un ensemble de 10 chiffres, puis, si l'identifiant est correct, on prend à nouveau 8 chiffres dans un ensemble de 10 chiffres. Il y a donc

$$10^8 \times 10^8 = 10^{16}$$

codes possibles.

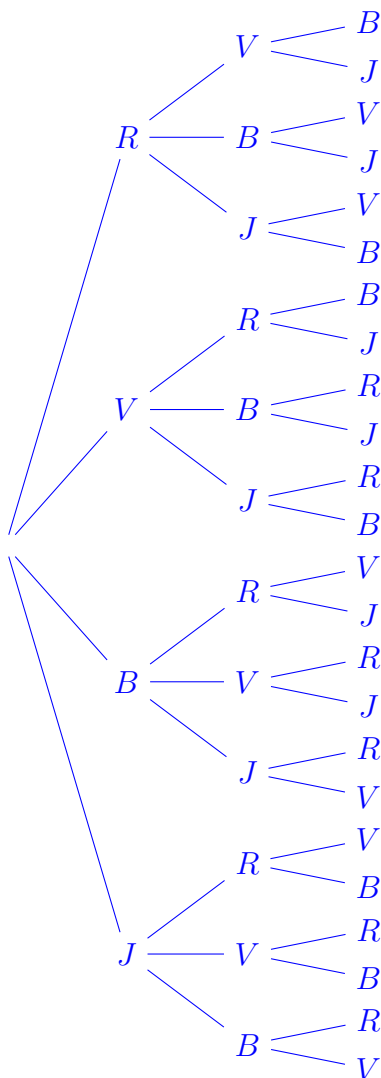
2. Arrangements

Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à en tirer successivement trois (c'est-à-dire en tenant compte de leur ordre de sortie) mais ici, sans remise de la boule tirée (donc sans répétition possible), en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

Les issues sont donc des triplets, des listes ordonnées, sans répétition possible de trois boules.

Pour dénombrer les éléments de Ω , un arbre est utile :



Cet arbre permet de montrer que

$$\text{card}(\Omega) = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

■ DÉFINITION :

Une liste ordonnée **sans** répétition de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E s'appelle un **arrangement** de p éléments de E .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments noté A_n^p est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$$

Remarque : A_n^p s'écrit avec p facteurs.

Exemple :

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

■ DÉFINITION : (Cas $p = n$)

Une liste ordonnée sans répétition de n éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble E s'appelle une **permutation** des n éléments de E .

■ DÉFINITION :

Le nombre de permutations de n éléments est :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

où $n!$ se lit **factorielle n** .

Remarque : Par convention : $0! = 1$.

Remarque : En observant que :

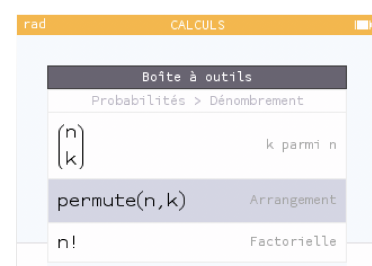
$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)(n-p) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-p)(n-p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\text{on peut écrire : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

À la **calculatrice** : dans Calculs, en cliquant sur la boîte à outils , puis Probabilités, puis Dénombrement, on peut choisir « permute(n, k) » :



3. Combinaisons

Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à tirer **simultanément** trois boules (c'est-à-dire sans ordre ni répétition) en notant les trois couleurs obtenues.

Les issues sont donc des listes non ordonnées, sans répétition possible de trois boules : par exemple $\{R; B; V\}$ est une issue, c'est la même que $\{R; V; B\}$ ou $\{V; R; B\}$ ou $\{V; B; R\}$ ou $\{B; V; R\}$ ou encore $\{B; R; V\}$.

■ DÉFINITION :

Une liste non ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E s'appelle une **combinaison** des p éléments de E .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté $\binom{n}{p}$ est :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque : utile pour les calculs : $\binom{n}{p}$ s'écrit avec p facteurs au numérateur et p facteurs au dénominateur :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$

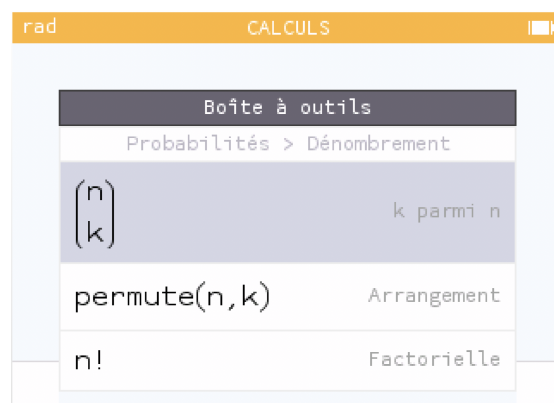
Exemple :

Calculer à la main puis avec la calculatrice : $\binom{7}{4}$.

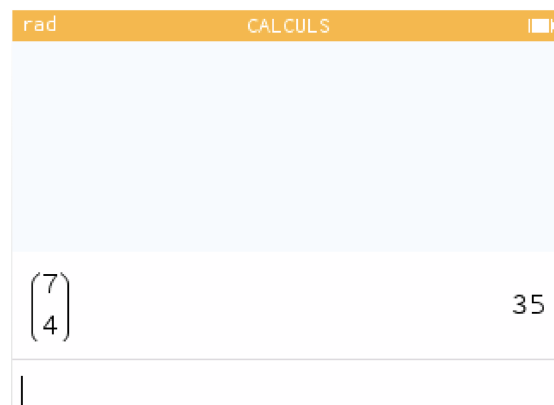
À la main :

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} &= \frac{A_7^4}{4!} \\ &= \frac{1}{4!} \times \frac{7!}{(7-4)!} \\ &= \frac{1}{4!} \times \frac{7!}{3!} \\ &= \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \\ &= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{4 \times 3 \times 2} \\ &= 5 \times 7 \\ &= 35 \end{aligned}$$

À la calculatrice : Dans Calculs, en cliquant sur la boîte à outils , puis Probabilités, puis Dénombrement, on peut choisir « $\binom{n}{k}$ » :



On obtient le résultat attendu :



Remarque : Le nombre de combinaisons de p éléments choisis dans un ensemble E à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n » : il était jadis noté : C_n^p en cohérence avec la notation A_n^p .

Remarque : On a aussi $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

En résumé : nombre de façons de choisir p objets parmi n objets

	avec remise	sans remise
avec ordre	n^p	A_n^p
sans ordre	$\times$	$\binom{n}{p}$

Remarque : Pour information, le nombre de façons de tirer p objets sans ordre et avec remise est

$$\binom{n+p-1}{p}$$

4. Propriétés des combinaisons et applications

A. Deux propriétés fondamentales

On considère un ensemble E à n éléments. Observons que toute partie à p éléments de E permet de définir une et une seule partie à $(n - p)$ éléments de E (constituée des éléments non choisis) et réciproquement. Il y a donc **bijection** entre les parties à p éléments de E et les parties à $(n - p)$ éléments de E . Donc, dans un ensemble à n éléments, il y a autant de parties à p éléments que de parties à $(n - p)$ éléments. On en déduit la formule de symétrie :

■ **PROPRIÉTÉ** : Formule de symétrie

Pour tous entiers naturels n et p avec $p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Exemple :

Dans un calcul, on remplacera avantageusement

$$\binom{10}{8} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

par

$$\begin{aligned} \binom{10}{2} &= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \\ &= 45 \end{aligned}$$

Dans un ensemble E à n éléments, on en choisit un particulier, que l'on note a . On peut partager l'ensemble des parties à p éléments de E en deux ensembles **disjoints**.

$$\begin{aligned} &\{\text{Parties à } p \text{ éléments de } E\} \\ &= \{\text{Parties à } p \text{ éléments de } E \text{ contenant } a\} \\ &\cup \{\text{Parties à } p \text{ éléments de } E \text{ ne contenant pas } a\} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Formule de Pascal¹

Pour tous entiers naturels n et p avec $1 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Remarque : Ces deux formules peuvent aussi se démontrer algébriquement (cf feuille d'exercices).

1. Blaise Pascal, né le 19 juin 1623 à Clermont (devenue Clermont-Ferrand) en Auvergne et mort le 19 août 1662 à Paris, est un polymathe : mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

B. Application : le triangle de Pascal

La formule de Pascal permet de calculer de proche en proche tous les $\binom{n}{p}$.

	0	1	2	3	4	...	$p-1$	p	...
0	1								
1	1	1							
2	1		1						
3	1			1					
4	1				1				
$\vdots$									
$n-1$	1						$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	
n	1							$\binom{n}{p}$	
$n+1$	1								
$\vdots$									

Soient a et b deux nombres réels (ou pas). Observons les développements de $(a+b)^n$ pour $n = 1, 2, 3$ et 4.

$$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

Le triangle de Pascal apparaît donc dans ces développements : pourquoi ?

$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \dots \times (a+b)$ où le facteur $(a+b)$ apparaît n fois.

En développant, on obtient donc une somme de termes formés de n facteurs pris chacun dans un des n facteurs $(a+b)$. Chaque terme de ce développement contient n facteurs en tout. Si le nombre de facteurs a est $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ alors le nombre de facteurs b est $n-k$. Ces termes sont donc de la forme : $a^k b^{n-k}$ où $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Pour k fixé, combien y a-t-il de termes de la forme $a^k b^{n-k}$?

Il y en a autant que de manières de choisir k termes a dans n facteurs $(a+b)$, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. En effet, en imaginant que les facteurs $(a+b)$ sont numérotés, choisir les termes a revient à choisir k numéros parmi n sans ordre ni répétition.

Il n'y a alors qu'un choix pour b^{n-k} .

Finalement, le développement est

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

■ PROPRIÉTÉ : Formule du binôme de Newton²

Soient a et b deux nombres réels (ou complexes).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété telle que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain $n > 0$ et on cherche à montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

On peut poser notre hypothèse de récurrence :

$$(HR) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= a \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &\quad + b \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \text{ d'après (HR)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ où } k' = k+1 \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

C. Application : nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Observons que :

$$\begin{aligned} &\{\text{Parties de } E\} \\ &= \{\text{Parties de } E \text{ à } 0 \text{ éléments}\} \\ &\cup \{\text{Parties de } E \text{ à } 1 \text{ éléments}\} \\ &\cup \dots \\ &\cup \{\text{Parties de } E \text{ à } n \text{ éléments}\} \end{aligned}$$

Cette union est disjointe, donc :

$$\begin{aligned} \text{card} \{\text{Parties de } E\} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n 1^k 1^{n-k} \binom{n}{k} \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si E est un ensemble à n éléments, le nombre de parties de E est 2^n .

2. Isaac Newton (1642 - 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais.