

Pierre Rémond de Montmort (né à Paris le 27 octobre 1678, et mort dans cette même ville le 7 octobre 1719) a popularisé un problème de dérangement sous la forme du *problème des chapeaux*.

n personnes laissent chacune leur chapeau au vestiaire. Elles le récupèrent en prenant chacune un chapeau au hasard. Montmort, dans son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* pose la question suivante : « Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne porte son propre chapeau à la sortie ? »

Un dérangement d'un ensemble E_n de n objets ($n \in \mathbb{N}^*$) est une permutation de E_n qui n'a pas de point fixe (au sujet des permutations, lire les deux premières pages du texte *Quelques inégalités*) ; autrement dit, c'est une bijection σ de E_n dans lui-même telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout i appartenant à E_n .

On notera d_n le nombre de dérangements d'un ensemble E_n de n objets.

On peut calculer, pour ainsi dire « à la main », les nombres d_n pour de petites valeurs de n :

$$d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 2, d_4 = 9. \text{ On pose, par convention : } d_0 = 1.$$

Il est possible d'exprimer le nombre d_n ($n \in \mathbb{N}$) uniquement en fonction de n .

Soit n un entier ≥ 2 . La nature des n objets de l'ensemble E_n nous importe peu : que ce soit des êtres humains, des voitures, des tomates, ..., ne change rien pour ce qui nous intéresse.

On peut donc, pour nos calculs, remplacer (mentalement) ces n objets par les n premiers entiers naturels non nuls : 1, 2, 3, ..., $n-1$, n [cf. le polycopié signalé ci-dessus].

d_n est le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, noté aussi $[1, n]$; et un dérangement de $[1, n]$ est une application bijective σ de $[1, n]$ dans lui-même telle que : $\forall i \in [1, n], \sigma(i) \neq i$.

Nous allons classer les dérangements de $[1, n]$ en deux « espèces ».

Soit σ un dérangement de $[1, n]$. Posons : $\sigma(1) = a$, où a est nécessairement un entier tel que $1 < a \leq n$.

Deux cas se présentent alors :

i) $\sigma(a) = 1$, i.e. σ échange 1 et a ;

ii) $\sigma(a) = b$, avec $b \neq 1$ (nous ne sommes plus dans le cas précédent) et $b \neq a$ (σ est un dérangement).

Espèce i) :

1	2	3		$a-1$	a	$a+1$		$n-1$	n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
a	.	.		.	1	.		.	.

Un tel dérangement est obtenu de la façon suivante : $1 \mapsto a$, $a \mapsto 1$, et on construit une application bijective de $\{2, 3, \dots, a-1, a+1, \dots, n\}$ dans lui-même, sans point fixe (autrement dit, un dérangement d'un ensemble de $n-2$ objets). Pour chaque choix de l'image de 1 (i.e. de l'entier a ; et il y a $n-1$ possibilités pour cet entier), il y a d_{n-2} choix pour les images des entiers de $\{2, 3, \dots, a-1, a+1, \dots, n\}$. Il y a donc $(n-1)d_{n-2}$ dérangements de l'espèce i).

Espèce ii) :

1	2	3			a		b		n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a	.	.		1		b		.	.

Ici, une fois choisi l'entier a ($1 < a \leq n$), il nous faut construire une application bijective de $\{2, 3, \dots, a-1, a, a+1, \dots, n\}$ dans $\{2, 3, \dots, a-1, 1, a+1, \dots, n\}$, sans point fixe.

Les ensembles de départ et d'arrivée de cette application sont les mêmes à une exception près : le a de l'ensemble de départ est remplacé par 1 dans l'ensemble d'arrivée.

Puisqu'en l'occurrence a ne peut avoir 1 comme image (dans cette « espèce », a et 1 ne s'échangent pas), et que 1 peut être l'image de tous les autres éléments de l'ensemble de départ (puisque'ils sont tous différents de 1), on peut remplacer (mentalement) dans l'ensemble d'arrivée le 1 par a . Alors, il apparaît clairement que les applications bijectives que l'on recherche sont exactement les dérangements de $\llbracket 2, n \rrbracket$, qui sont au nombre de d_{n-1} . Il y a donc $(n-1)d_{n-1}$ dérangements de l'espèce ii).

Les deux « espèces » ci-dessus étant distinctes, on a donc établi que :

$$\forall n \geq 2, d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Ainsi, on a : $\forall n \geq 2, d_n = nd_{n-1} - d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.

D'où : $\forall n \geq 2, d_n - nd_{n-1} = -d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} = -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2})$ (*).

Posons : $\forall k \geq 1, x_k = d_k - kd_{k-1}$. Le premier terme de la suite (x_k) est : $x_1 = d_1 - 1 \times d_0 = 0 - 1 = -1$.

L'égalité (*) ci-dessus s'écrit alors : $\forall n \geq 2, x_n = -x_{n-1}$.

La suite (x_k) est donc la suite géométrique de raison -1 , et de premier terme $x_1 = -1$.

D'où : $\forall n \geq 1, x_n = (-1)^{n-1} \cdot x_1 = (-1)^{n-1} \cdot (-1) = (-1)^n$. Autrement dit : $\forall n \geq 1, d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$ (**).

Revenons à la question posée par Pierre Rémond de Montmort. Dans ce cas, puisqu'il y a un nombre fini de chapeaux, la probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre de cas favorables (à la réalisation de l'événement considéré) et le nombre de cas possibles. Ce dernier est $n!$, puisque la personne s'occupant du vestiaire peut rendre les chapeaux *dans*

tous les ordres imaginables. La probabilité recherchée est donc : $\frac{d_n}{n!}$.

L'égalité (**) nous donne : $\forall n \geq 1, \frac{d_n - nd_{n-1}}{n!} = \frac{d_n}{n!} - \frac{nd_{n-1}}{n!} = \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$.

On a donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} \right) + \left(\frac{d_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{d_{n-2}}{(n-2)!} \right) + \dots + \left(\frac{d_2}{2!} - \frac{d_1}{1!} \right) + \left(\frac{d_1}{1!} - \frac{d_0}{0!} \right) = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{(-1)^1}{1!}.$$

Après simplification évidente du membre de gauche de l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\forall n \geq 1, \frac{d_n}{n!} - \frac{d_0}{0!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^1}{1!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \text{ i.e. } \forall n \geq 1, \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{d_0}{0!}.$$

Rappelons que : $d_0 = 1$ et $0! = 1$; d'où : $\frac{d_0}{0!} = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$. Ainsi : $\forall n \geq 1, \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

La limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$ est $\frac{1}{e}$.

Ainsi, pour les grandes valeurs de n , la probabilité qu'aucune des n personnes ne porte son propre chapeau à la sortie est proche de $\frac{1}{e}$, donc de **0,4** $\left(\frac{1}{e} = 0,3678794412\dots \right)$.

Par ailleurs, nous avons obtenu l'expression suivante du nombre d_n : $\forall n \geq 1, d_n = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.

- Pour calculer le nombre d_n de dérangements d'un ensemble E_n de n objets, on peut aussi procéder de la façon suivante : Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons P_k^n l'ensemble des permutations de E_n ayant exactement k points fixes. Une permutation de E_n qui a exactement k points fixes s'obtient en choisissant les k points fixes (on a $\binom{n}{k}$ choix possibles), puis en construisant un dérangement des $n - k$ éléments restants de E_n (on a pour cela d_{n-k} possibilités). Ainsi le nombre d'éléments de P_k^n est $\binom{n}{k} \times d_{n-k}$.

Par ailleurs, il est clair que les P_k^n ($0 \leq k \leq n$) sont deux à deux disjoints et que leur réunion donne l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de E_n . Ainsi, puisque $n!$ est le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$, on a :

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times d_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \times d_{n-k} & \left[\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \times d_i & [\text{changement d'indice : } i = n - k]. \end{aligned}$$

Remarquons que cette égalité reste valable pour $n = 0$: $\sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} \times d_i = \binom{0}{0} \times d_0 = 1 \times 1 = 1 = 0!$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$. C'est ici qu'intervient la formule d'inversion de Pascal (cf. ci-dessous), qui nous

permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{\cancel{(n-k)!}} = n! \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right]$.

Nous procédons au changement d'indice : $i = n - k$ ($0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 0 \leq i \leq n$), et nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = n! \left[\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right].$$

Formule d'inversion de Pascal.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites numériques.

Si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$.

On inverse les places de u_n et v_n en ajoutant une « correction » $(-1)^{n-k}$.

Preuve.

La suite (u_n) est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k$ (*).

Soit n un entier naturel quelconque. $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} v_i \right]$ (d'après (*))

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} v_i \quad \text{Inversion de somme : } \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq i \leq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ i \leq k \leq n \end{cases}.$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \frac{n!}{\cancel{k!} (n-k)!} \times \frac{\cancel{k!}}{i! (k-i)!} = \frac{n!}{i! (n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(n-k)! (k-i)!} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k} \quad [k-i = (n-i) - (n-k)]$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k} v_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_i \left[\sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n-i}{n-k} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_i \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \right] \quad (\text{changement d'indice : } j = n - k.)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} v_i \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j \right] + \binom{n}{n} v_n \left[\binom{0}{0} (-1)^0 \right] \quad (\text{décomposition pour éviter } 0^0.)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} v_i (1 + (-1))^{n-i} + v_n \quad (\text{Formule du binôme de Newton.})$$

$$= v_n \quad (\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (1 + (-1))^{n-i} = 0.)$$

- On peut encore retrouver le nombre d_n de dérangements d'un ensemble E_n de n objets, ou, ce qui revient au même, de $[1, n]$ (cf. plus haut), en utilisant la *formule du crible*. La formule du crible, connue aussi sous le nom de *formule du crible de Poincaré*, ou *principe d'inclusion-exclusion*, exprime le nombre d'éléments d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Cette formule était déjà utilisée par le mathématicien *Abraham de Moivre* au dix-septième siècle. On peut la démontrer par récurrence : je vais donner l'esquisse d'une telle démonstration dans les lignes qui suivent. On peut toutefois simplifier cette démonstration en introduisant la notion de fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble E (cf. l'appendice du polycopié intitulé *Suites de Farey*).

Le nombre d'éléments d'un ensemble E sera noté $|E|$. Soient A et B deux ensembles quelconques.

Il est clair que : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (C_1) [en additionnant $|A|$ et $|B|$, nous comptons deux fois le nombre d'éléments de $A \cap B$].

Considérons maintenant trois ensembles A , B et C quelconques.

La réunion étant associative [i.e. : $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$], nous utilisons à deux reprises l'égalité (C_1) pour obtenir : $|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)|$ (*).

La distributivité entre union et intersection [i.e. : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$] nous permet d'écrire, en utilisant une nouvelle fois l'égalité (C_1) : $|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$ (**).

(Il est évident que : $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$!)

De (*) et (**) nous tirons : $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ (C_2).

Passons au cas de quatre ensembles A , B , C et D .

$$\begin{aligned}
 |A \cup B \cup C \cup D| &= |A \cup (B \cup C \cup D)| = |A| + |B \cup C \cup D| - |A \cap (B \cup C \cup D)| \text{ [d'après } (C_1).] \\
 &= |A| + |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap (B \cup C \cup D)| \text{ [d'après } (C_2).] \\
 &= |A| + |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)| \\
 &\quad \text{[distributivité entre union et intersection.]} \\
 &= |A| + |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |B \cap C \cap D| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| - |(A \cap B) \cap (A \cap D)| - |(A \cap C) \cap (A \cap D)| + |(A \cap B) \cap (A \cap C) \cap (A \cap D)|) \text{ [d'après } (C_2).] \\
 &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.
 \end{aligned}$$

En notant I l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, la formule du crible dans le cas de quatre ensembles peut s'écrire plus brièvement :

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum_{X \in I} |X| - \sum_{\substack{(X,Y) \in I^2 \\ X \neq Y}} |X \cap Y| + \sum_{\substack{(X,Y,Z) \in I^3 \\ X \neq Y, X \neq Z, \\ Y \neq Z}} |X \cap Y \cap Z| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Dans le cas général, on obtient :

Formule du crible ou principe d'inclusion et d'exclusion.

Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des ensembles finis. On a :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| + (-1)^1 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

- Comptons pour la troisième fois les dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour chaque i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons A_i l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixant (au moins) i . $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant au moins un point invariant, et nous voulons donc compter le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ privé de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Le nombre d'éléments de chaque A_i ($1 \leq i \leq n$) est : $(n-1)!$ (un élément de A_i fixe i et permute les $n-1$ éléments restants).

Soit (i, j) un couple tel que $1 \leq i < j \leq n$. Un élément de $A_i \cap A_j$ laisse i et j invariants, et permute les $n-2$ éléments restants. Ainsi le nombre d'éléments de $A_i \cap A_j$ est $(n-2)!$. Par ailleurs, le nombre de tels couples (i, j) est $\binom{n}{2}$.

Soit (i, j, k) un triplet tel que $1 \leq i < j < k \leq n$. Il y a $\binom{n}{3}$ tels triplets. Un élément de $A_i \cap A_j \cap A_k$ fixe i, j et k , puis permute les $n-3$ éléments restants. Il y a donc $(n-3)!$ permutations dans $A_i \cap A_j \cap A_k$. Il est clair que $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ a un seul élément : l'identité.

La formule du crible nous donne : $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots + (-1)^{n-1} \times 1$

$$= n! - \frac{n!}{2! \cancel{(n-2)!}} \cancel{(n-2)!} + \frac{n!}{3! \cancel{(n-3)!}} \cancel{(n-3)!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!} \quad \left[1 = \frac{n!}{n!} \right]$$

$$= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right) \quad \left[1 = \frac{1}{1!} \right]$$

D'où : $d_n = n! - n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$.

On retrouve : $d_n = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.