

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7$$

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
2. (a) En utilisant le résultat de la question 1.b., montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.
 (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.
 (c) Calculer la limite de la suite (w_n) .

Solution : 1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite constante.

b. On en déduit aussi que, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0$.

$$\text{Or } v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{21}{4}.$$

$$\text{Donc pour tout entier naturel } n, v_n = \frac{21}{4}.$$

$$\text{De } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \text{ on déduit que, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}.$$

2. a. Posons, pour tout entier naturel n , $P(n) : u_n < u_{n+1} < 15$.

Initialisation : $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ alors $u_0 < u_1 < 15$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.

Prouvons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n < u_{n+1} < 15$.

En multipliant ces inégalités par $\frac{1}{4}$ strictement positif, et en ajoutant $\frac{21}{4}$,

$$\text{on obtient } \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{1}{4} \times 15 + \frac{21}{4}.$$

Et donc $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire à partir du rang 0.

On en déduit : pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. De la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 15, alors par le théorème de convergence des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

3. a. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 7) \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = \frac{1}{4}w_n$ et $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$.

Donc (w_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme -4 .

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} w_n &= w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= -4 \times \frac{1}{4^n} \\ &= -\frac{4}{4^n} \\ &= -\frac{1}{4^{n-1}} \\ &= -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

et donc, comme $w_n = u_n - 7$, on a : $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$.

Comme $7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 7 - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$,

par limite de produit et de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.