

EXERCICE 25**Deux méthodes pour trouver la limite d'une suite**

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

- 1) a) Démontrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n < 1$
 b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que la suite (u_n) est alors croissante.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ
- 3) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$
 - a) Déterminer la valeur de ℓ
 - b) Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de N tel que : $\forall n > N, |u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Entrer cet algorithme sur votre calculatrice puis déterminer N .

Partie B : deuxième méthode

- 1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
- 2) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 26**Amérique du Nord juin 2013 - Extrait**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

- 1) On considère l'algorithme suivant :
 - a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
 - b) Que permet de calculer cet algorithme ?
 - c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-4}
Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Variables : n, i entiers naturels
 u : réel positif

Entrées et initialisation

 Lire n
 $1 \rightarrow u$

Traitement

pour i variant de 1 à n **faire**
 $\sqrt{2u} \rightarrow u$
 fin

Sorties : Afficher u

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.
 b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.