

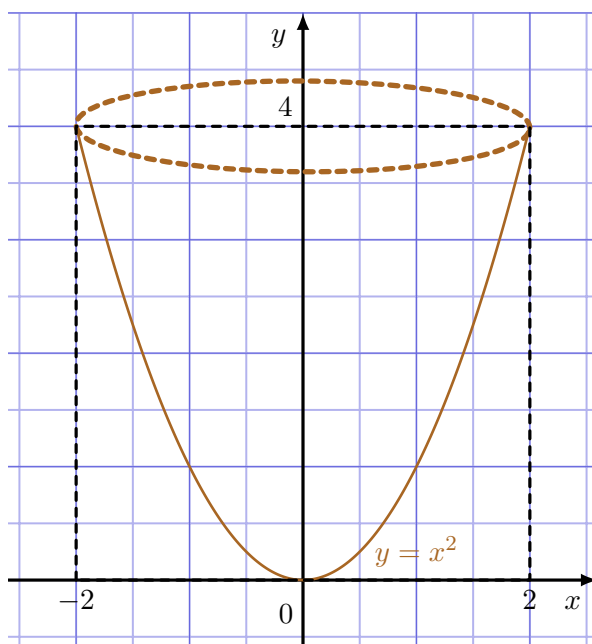
Devoir maison n°

À rendre le

On veut connaître la contenance d'un récipient de forme parabolique soudé à un socle :



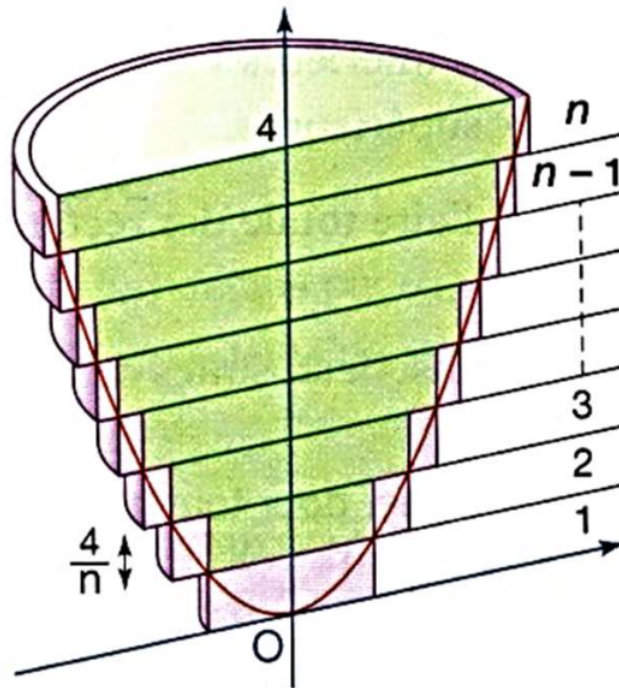
Le solide hors socle a été obtenu par rotation autour de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = x^2$:



L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le calcul d'aires et de volumes, l'idée suivante est fondamentale : pour calculer une grandeur inconnue, ici un volume, on l'encadre de plus en plus finement par des grandeurs connues, ici des volumes connus.

On sait calculer des volumes de boules, de cônes, de cylindres. Les cylindres conviennent bien dans la situation étudiée. Pour chaque entier n , on suppose que l'on a placé à l'intérieur du bol $(n - 1)$ cylindres (en vert sur la figure), et à l'extérieur n cylindres (en violet sur la figure). La hauteur de chacun de ces cylindres est $\frac{4}{n}$.



On note $\mathcal{V}_n$ le volume total des cylindres intérieurs, et $\mathcal{V}'_n$ le volume total des cylindres extérieurs. On note V le volume du bol. Pour chaque n , on obtient ainsi un encadrement de V par $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{V}'_n$.

1. Prouvez que :

$$\mathcal{V}_n = \frac{16\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \text{ et } \mathcal{V}'_n = \frac{16\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

2. (a) Démontrez que les suites $(\mathcal{V}_n)$ et $(\mathcal{V}'_n)$ sont convergentes et qu'elles ont la même limite.
 (b) Déduisez-en la valeur de $\mathcal{V}$.

Solution:**1. Calcul des volumes $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{V}'_n$**

Chaque cylindre a pour hauteur $h = \frac{4}{n}$.

Pour les cylindres intérieurs :

Le k -ième cylindre intérieur (pour $k = 1, 2, \dots, n-1$) a pour base un disque de rayon $r_k = 2 - \frac{4k}{n}$ (car le rayon décroît linéairement de 2 à 0 le long de la hauteur 4).

Le volume du k -ième cylindre intérieur est :

$$V_k^{\text{int}} = \pi r_k^2 \cdot h = \pi \left(2 - \frac{4k}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n}$$

En développant :

$$V_k^{\text{int}} = \pi \cdot \frac{4}{n} \cdot \left(4 - \frac{16k}{n} + \frac{16k^2}{n^2}\right) = \frac{16\pi}{n} - \frac{64\pi k}{n^2} + \frac{64\pi k^2}{n^3}$$

Mais en fait, il est plus simple d'observer que le rayon à la hauteur correspondant au sommet du k -ième cylindre est $2\left(1 - \frac{k}{n}\right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \pi \left[2\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right]^2 \cdot \frac{4}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \pi \cdot 4 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} \\ &= \frac{16\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{16\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{16\pi}{n} \left[(n-1) - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right] \end{aligned}$$

Or, on sait que $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Cependant, la formule demandée suggère une approche différente. En réalité, si le rayon au niveau k (en partant du bas) est proportionnel à $(n-k)$, on a :

$$\mathcal{V}_n = \frac{16\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Pour les cylindres extérieurs :

De manière similaire :

$$\mathcal{V}'_n = \frac{16\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

2. (a) Convergence des suites

On utilise la formule de la somme : $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$

Donc :

$$\mathcal{V}_n = \frac{16\pi}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{16\pi(n-1)n}{2n^2} = \frac{8\pi(n-1)}{n} = 8\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\mathcal{V}'_n = \frac{16\pi}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{16\pi n(n+1)}{2n^2} = \frac{8\pi(n+1)}{n} = 8\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 8\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 8\pi$$

Les deux suites convergent vers la même limite 8π .

(b) Valeur de $\mathcal{V}$

Puisque pour tout n , on a $\mathcal{V}_n \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{V}'_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}'_n = 8\pi$, par le théorème des gendarmes :

$\mathcal{V} = 8\pi$