

Séquence XVI – Suites – Théorèmes sur les limites

Exercice XVI.1

La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases}$$

- Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
- Montrer que (u_n) est une suite croissante.
- Montrer que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Exercice XVI.2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n} \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - En déduire que la suite (u_n) converge.
 - Soit L la limite de la suite (u_n) . Justifier que L est un réel strictement positif.
 - En déduire la valeur de L .

Exercice XVI.3

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{5}{4}u_n \end{cases}$$

- Montrer que (u_n) est croissante.
 - On suppose que (u_n) converge, quelle est alors sa limite L ?
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Démontrer le résultat de la question 1.c) par une autre méthode.

Exercice XVI.4

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Montrer que la fonction f est continue sur $I =]0; +\infty[$ et que $f(I) \subset I$.
- On définit alors la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Calculer u_1, u_2 et u_3 .
En déduire, pour tout entier n , une conjecture sur u_n et la démontrer.
- Quelle est la limite ℓ de la suite (u_n) ?
Est-ce que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$? Pourquoi ?

Exercice XVI.5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

- Soit l'algorithme suivant :

Lire n

u prend la valeur 1

pour i variant de 1 à n

u prend la valeur $\sqrt{2u}$

Afficher u

- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
- Que permet de calculer cet algorithme ?
- Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
On donnera les valeurs approchées à 10^{-4} près. Quelles conjectures peut-on faire concernant la suite (u_n) ?

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée					

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.
 - Déterminer le sens de variation de (u_n) .
 - Démontrer que (u_n) est convergente.
On ne demande pas la valeur de sa limite.

Séquence XVI – Suites – Théorèmes sur les limites

Exercices plus difficiles

Exercice XVI.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n) \end{cases}$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0; 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$$

- (a) Étudier les variations de f sur $[0; 20]$.
- (b) En déduire que si $x \in [0; 10]$, alors $f(x) \in [0; 10]$.
2. Déterminer u_1, u_2 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. On note ℓ la limite de la suite (u_n) :
 - (a) Démontrer que ℓ est solution de l'équation $\ell = \frac{1}{10}\ell(20 - \ell)$.
 - (b) Résoudre cette équation et en déduire la valeur de ℓ .

Exercice XVI.7

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 2$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que (u_n) n'est pas majorée.

Exercice XVI.8

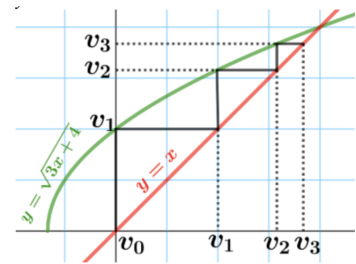
On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
 $u_0 = 0; u_1 = 0,9; u_2 = 0,99; u_n = \underbrace{0,99 \dots 9}_{n \text{ facteurs } 9}$

1. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre u_n et u_{n-1} .
2. On pose, pour tout entier naturel k non nul, $v_k = u_k - u_{k-1}$.
 - (a) Démontrer que $\sum_{k=1}^n v_k = u_n$.
 - (b) Calculer $\sum_{k=1}^n 9 \times 10^{-k}$.
3. Peut-on affirmer que $0,999\dots = 1$?

Exercice XVI.9

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4}$.

1. Déterminer une fonction f définie sur $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$ telle que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.
2. Voici ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$:



Expliquer comment on a pu représenter v_1, v_2 puis v_3 sur l'axe des abscisses.

3. Conjecturer le sens de variation, un majorant et un minorant de la suite (v_n) .
4. Démontrer par récurrence ces conjectures.
5. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite ℓ .

Exercice XVI.10

On sait que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente. L'objectif est de démontrer que cette suite tend vers e .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}$.

1. (a) Calculer $f(0)$
 (b) Exprimer $f(1)$ en fonction de u_n .
2. (a) Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$.
3. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$.
 - (a) Démontrer que g est strictement croissante sur $[0; 1]$.
 - (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \left(1 - \frac{1}{n!}\right)e$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice XVI.11

Soit α un réel.

On considère une suite (u_n) qui vérifie la condition suivante : il existe un réel k avec $0 < k < 1$ tel que, pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice XVI.12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $[0; 2]$.
(b) Montrer que, si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \in [1; 2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$
3. À l'aide de la calculatrice, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?
4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 2$$

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n ,
on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.
(b) On admettra que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n - u_n \geq 0 \text{ et } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n).$$

En déduire par récurrence, que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
6. (a) Justifier que les deux suites convergent vers une même limite ℓ .
(b) Déterminer la valeur exacte de ℓ .

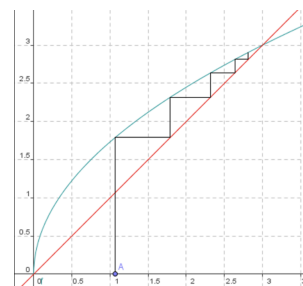
Exercice XVI.13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
Déterminer, en fonction de n , l'expression de S_n , puis de T_n .
7. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Exercice XVI.14

Sur le dessin ci-contre sont représentées la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction définie pour x positif par $f(x) = \sqrt{3x}$.



On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1; 3]$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{3u_n}$.

1. L'intervalle $I = [1; 3]$ semble contenir tous les termes de la suite.
Démontrez par récurrence que tous les termes de la suite appartiennent effectivement à I .
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) puis démontrer la conjecture.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et conjecturer sa limite.
4. On étudie la suite (v_n) définie par $v_n = 3 - u_n$ pour tout entier naturel n .
Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{3} \times \frac{3 - u_n}{\sqrt{u_n + \sqrt{3}}}$.
5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times v_n$$

6. Démontrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^n$$
7. Démontrer que la suite (v_n) converge vers 0.
8. En Déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Séquence XVI – Suites adjacentes

Exercice XVI.15

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier n non nul, par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

- Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- Montrer qu'elles convergent et donner une valeur approchée de leurs limites à 10^{-3} près.

Exercice XVI.16

Soit u_0 et v_0 deux réels vérifiant : $u_0 > v_0 > 0$.

Soit u et v deux suites définies, pour tout entier

$$n \geq 0, \text{ par } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

- Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
- Montrer que la suite $u \times v$ est constante.
- Déterminer alors les limites de (u_n) et (v_n) .

Exercice XVI.17

Question préliminaire : On pose

$$A(n) = 2n + 1 - 2\sqrt{n^2 + n}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $A(n) > 0$.

On définit alors pour $n \geq 2$,

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}$$

- Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. (Pour l'étude des variations on pourra utiliser les résultats de la question préliminaire.)
- On note ℓ la limite commune de ces deux suites.
 - Pour tout $n \geq 2$, comparer u_n , v_n et ℓ .
 - Déterminer la plus petite valeur N de n telle que $|u_n - v_n| \leq 0.1$.
- En déduire à l'aide du tableau suivant un encadrement de ℓ à 10^{-1} près.

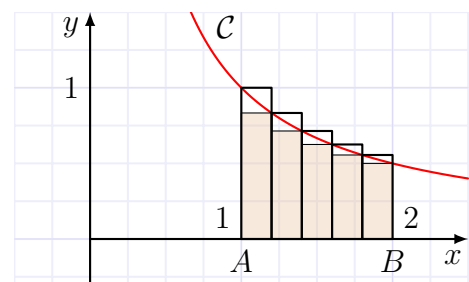
n	20	40	60	80	100
u_n	1,349	1,381	1,396	1,405	1,410

n	120	140	160	180	200
u_n	1,415	1,418	1,421	1,423	1,425

Exercice XVI.18

On se propose de calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D du plan délimitée, dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) par la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. D est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ telles que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Sur l'axe des abscisses, on place les points A et B d'abscisses respectives 1 et 2. Un entier naturel n supérieur ou égal à 2 étant fixé, on partage le segment $[AB]$ en n segments isométriques. À partir de chacun des n segments obtenus, on construit deux rectangles dont l'un des deux autres sommets appartient à la courbe $\mathcal{C}$. On obtient ainsi n rectangles « inférieurs » à la courbe et n rectangles « supérieurs ».



On note s_n l'aire totale des rectangles « inférieurs » et S_n l'aire totale des rectangles « supérieurs ». On obtient ainsi deux suites de réels réels (s_n) et (S_n) qui encadrent l'aire $\mathcal{A}$ cherchée.

- Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,
 - $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
 - $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$
- Montrer que la suite (s_n) est croissante et que la suite (S_n) est décroissante.
- Montrer que la suite $(S_n - s_n)$ tend vers 0. Que pouvez-t-en conclure pour les suites (S_n) et (s_n) ?
- (a) Déterminer un entier p tel que s_p soit une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près et un entier q tel que s_q soit une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-4} près.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer s_{50} et s_{500} .

Commentaire : En fait, $\mathcal{A} = \ln 2$.