

Compléments sur les suites

1. Convergence des suites monotones

A. Quelques préliminaires

Considérons l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$.

Par exemple, le nombre $m = \frac{3}{2}$ est un majorant rationnel de l'ensemble E : en effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$ tel que $x^2 < 2$, on a $x^2 < \frac{9}{4}$ donc $x < \frac{3}{2}$.

De même, $m' = \frac{142}{100}$ est aussi un majorant rationnel de E et $m' < m$.

De même : $m'' = \frac{1415}{1000}$ est également un majorant rationnel de E et $m'' < m' < m$.

Le nombre $\sqrt{2}$ n'étant pas un nombre rationnel, on se convaincra intuitivement qu'on ne peut pas trouver de plus petit majorant rationnel de E .

En revanche, l'ensemble E possède un plus petit majorant réel qui est $m = \sqrt{2}$.

C'est en fait une propriété de tout ensemble borné et non vide de nombres réels :

■ AXIOME : borne supérieure

Si l'ensemble $E \neq \emptyset$ est contenu dans $\mathbb{R}$ et est majoré, alors l'ensemble E admet un plus petit majorant, appelé **borne supérieure** de E .

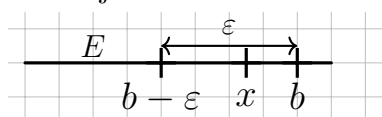
■ PROPRIÉTÉ : Caractérisation

Soit l'ensemble $E \neq \emptyset$ contenu dans $\mathbb{R}$ et majoré.

- (i) Dire que le réel b est la borne supérieure de l'ensemble E signifie que : $\forall x \in E, x \leq b$ et si M est un majorant quelconque de E alors $b \leq M$.
- (ii) Autre formulation : dire que le réel b est la borne supérieure de l'ensemble E signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que

$$b - \varepsilon < x \leq b$$

Démonstration. En effet, s'il n'existait aucun $x \in E$ tel que $b - \varepsilon < x$ alors $b - \varepsilon$ serait un majorant de E strictement inférieur à b , ce qui est impossible car b est le plus petit majorant de E .



■ RAPPEL : Définition de la convergence d'une suite

La suite (u_n) converge vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .

Cela se reformule sous la forme :

La suite (u_n) converge vers le réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

B. Convergence des suites monotones

■ THÉORÈME : (Théorème de convergence des suites monotones)

Toute suite croissante et majorée de nombres réels converge.

Toute suite décroissante et minorée de nombres réels converge.

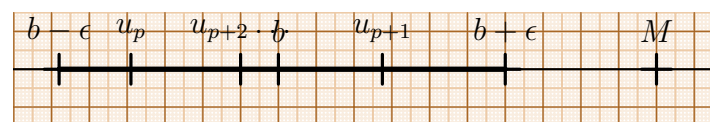
Remarque : Ce théorème prouve la convergence mais ne dit rien sur la valeur de la limite : nous verrons plus loin un théorème qui apporte, dans certains cas, une réponse à cette question.

Démonstration. Considérons une suite croissante (u_n) de nombres réels, majorée par un réel M .

L'ensemble des termes de la suite (u_n) est un ensemble de réels non vide et majoré (par M) : par conséquent, cet ensemble admet une borne supérieure b . Comme b est le plus petit majorant de la suite, alors $b \leq M$.

On va montrer que sous ces hypothèses, la suite (u_n) converge vers b .

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation (ii) de la borne supérieure, il existe un terme u_p tel que $b - \varepsilon < u_p \leq b$. En effet, dans le cas contraire, le réel $b - \varepsilon$ serait un majorant de l'ensemble des termes de la suite (u_n) , ce qui n'est pas possible, car le plus petit des majorants de cet ensemble est sa borne supérieure b).



Or la suite (u_n) est supposée croissante. Par conséquent, pour tout entier $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ donc, pour tout entier $n \geq p$, $b - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq b < b + \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow b - \varepsilon < u_n < b + \varepsilon$ et ceci signifie que la suite (u_n) converge vers b .

Ainsi, toute suite croissante et majorée de nombres réels converge.

On démontre de manière analogue ou en utilisant ce résultat (appliqué à la suite $-u$) que toute suite décroissante et minorée de nombres réels converge. □

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Montrons que cette suite converge en appliquant le théorème précédent.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc la suite (u_n) est (strictement) croissante.
- De plus, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Alors $k > k-1 > 0$. Donc $k^2 > k(k-1) > 0$ donc

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

On peut alors observer que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k-1)} &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ \text{Ainsi } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &< \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k'=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k'} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) \\ &\text{en posant : } k' = k-1 \\ &= \sum_{k'=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k'} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &< 2 \end{aligned}$$

Ce calcul montre donc que la suite (u_n) est majorée par 2. Le théorème de convergence des suites monotones permet donc d'affirmer que la suite (u_n) converge.



Attention

Cependant on ne peut rien dire de sa limite ℓ , sauf qu'elle est inférieure **ou égale** à 2.

Dans cet exemple, on peut démontrer^a que :

$$\ell = \frac{\pi^2}{6}$$

^a. Euler l'a fait en 1741, mais la preuve est compliquée !

Remarque : Il existe des suites convergentes et non monotones !

Exemple :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

n'est pas monotone et pourtant converge vers 2.

2. Un théorème de point fixe

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I , vérifiant $f(I) \subset I$. Autrement dit : $\forall x \in I, f(x) \in I$. On peut alors définir la suite récurrente (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Supposons de plus que la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \\ &= \lim_{X \rightarrow \ell} f(X) \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \end{aligned}$$

Si l'on suppose de plus la fonction f continue en ℓ alors $\lim_{x \rightarrow \ell} f(X) = f(\ell)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, on en déduit que le réel ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$

La résolution de cette équation permettra de trouver la limite ℓ .

■ THÉORÈME : (Théorème de point fixe)

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si la fonction f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{4x + 5}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Initialisation :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \sqrt{4 \times 1 + 5} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Donc on a bien $u_1 \geq u_0$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain n , $u_{n+1} \geq u_n$. On veut montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= f(u_{n+1}) - f(u_n) \\ &= \sqrt{4u_{n+1} + 5} - \sqrt{4u_n + 5} \end{aligned}$$

La fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ car sa dérivée f' vérifie $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} > 0$.

Donc si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

Par récurrence, on a donc montré que (u_n) est croissante.

2. Montrer que la suite (u_n) converge.

Pour montrer la convergence, il suffit de montrer que la suite est majorée.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

Initialisation : $u_0 = 1 \leq 5$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain n , $u_n \leq 5$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{4u_n + 5} \\ &\leq \sqrt{4 \times 5 + 5} \\ &\leq \sqrt{25} \\ &\leq 5 \end{aligned}$$

Par récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 5, donc elle converge d'après le théorème de convergence des suites monotones.

3. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Montrer que ℓ est solution de l'équation $\ell^2 - 4\ell - 5 = 0$.

En déduire ℓ .

D'après le théorème de point fixe, si la suite (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$.

La fonction $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc en particulier en ℓ .

Ainsi : $\ell = f(\ell) = \sqrt{4\ell + 5}$.

En élevant au carré :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 4\ell + 5 \\ \text{i.e. } \ell^2 - 4\ell - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

Les solutions sont : $\ell_1 = \frac{4+6}{2}$ et $\ell_2 = \frac{4-6}{2}$, i.e.

$$\ell = 5 \text{ et } \ell = -1.$$

Comme la suite (u_n) est à termes positifs (car $u_0 = 1 > 0$ et f est positive sur $[0; +\infty[$), on a $\ell \geq 0$. Donc $\ell = 5$.

3. Suites adjacentes

■ DÉFINITION :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si

- La suite (u_n) est croissante.
- La suite (v_n) est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Exemple :

Soient (u_n) et (v_n) les suites respectivement définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Vérifier que ces deux suites sont adjacentes.

Étude de la monotonie de (u_n) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Étude de la monotonie de (v_n) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} \\ &= \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on a $1 - n \leq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Ainsi (v_n) est décroissante.

Étude de la limite de $(v_n - u_n)$:

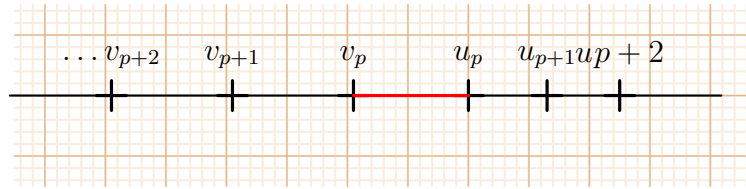
$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{1}{n!} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \end{aligned}$$

Les trois conditions sont vérifiées, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Remarque : La définition précédente implique que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.

En effet, supposons qu'il existe un entier naturel p tel que : $u_p > v_p$.

Comme la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, on aurait :



Ainsi, pour tout entier $n \geq p$, on aurait :

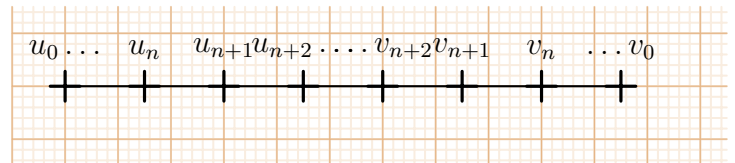
$$v_n - u_n \geq v_p - u_p$$

ceci contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

■ PROPRIÉTÉ :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont la même limite.

Démonstration. La situation est donc la suivante :



Ainsi

- Pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_0$. Donc la suite (u_n) est majorée par v_0 et croissante. Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ .
 - Pour tout entier naturel n , $v_n \geq u_0$. Donc la suite (v_n) est minorée par u_0 et décroissante. Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ' .
- De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \ell' - \ell = 0$ donc

$$\ell' = \ell$$

□

Exemple :

Les deux suites de l'exemple précédent sont donc convergentes vers la même limite ℓ .

Nous démontrerons ultérieurement que $\ell = e$.