

Solution de l'exercice

$$\text{Fonction } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

9 septembre 2025

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Première partie : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| = \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right|$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Première partie : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{x} \right| &= \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \\ &= \left| x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \end{aligned}$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Première partie : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{x} \right| &= \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \\ &= \left| x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \end{aligned}$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Première partie : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{x} \right| &= \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \\ &= \left| x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \end{aligned}$$

Comme $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| = |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Première partie : Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{x} \right| &= \left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \\ &= \left| x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \end{aligned}$$

Comme $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x)}{x} \right| &= |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x| \times 1 = |x| \end{aligned}$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Deuxième partie : Dérivabilité de F en 0.

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Deuxième partie : Dérivabilité de F en 0.

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Deuxième partie : Dérivabilité de F en 0.

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Deuxième partie : Dérivabilité de F en 0.

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$$

Question 1 : Montrer que $\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$ et dérivabilité en 0

Deuxième partie : Dérivabilité de F en 0.

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq |x|$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$$

Donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

- La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

- ▶ La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ La fonction $v : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables :

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

- ▶ La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ La fonction $v : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables :
 - ▶ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 - ▶ $t \mapsto \sin(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Question 2 : Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour $x \neq 0$, on a $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

- ▶ La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ La fonction $v : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables :
 - ▶ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 - ▶ $t \mapsto \sin(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Le produit de fonctions dérivables étant dérivable, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Pour tout $x \neq 0$, en utilisant la règle de dérivation du produit $(uv)' = u'v + uv'$:

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Pour tout $x \neq 0$, en utilisant la règle de dérivation du produit

$$(uv)' = u'v + uv' :$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Pour tout $x \neq 0$, en utilisant la règle de dérivation du produit

$$(uv)' = u'v + uv' :$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$u'(x) = 2x$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Pour tout $x \neq 0$, en utilisant la règle de dérivation du produit

$$(uv)' = u'v + uv' :$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Pour tout $x \neq 0$, en utilisant la règle de dérivation du produit

$$(uv)' = u'v + uv' :$$

Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$u'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Donc :

$$F'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Question 3 : Calculer $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$

Donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Question 4a : Démontrer que $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Question 4a : Démontrer que $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n :

► $\sin(n\pi) = 0$

Question 4a : Démontrer que $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n :

- ▶ $\sin(n\pi) = 0$
- ▶ $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Question 4a : Démontrer que $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n :

- ▶ $\sin(n\pi) = 0$
- ▶ $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= \frac{2}{n\pi} \times 0 - (-1)^n \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = |(-1)^{n+1}| = 1$.

Question 4a : Démontrer que $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = 1$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n :

- ▶ $\sin(n\pi) = 0$
- ▶ $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= \frac{2}{n\pi} \times 0 - (-1)^n \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\left| f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = |(-1)^{n+1}| = 1$.

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Non-continuité de f en 0 :

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Non-continuité de f en 0 :

La suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Non-continuité de f en 0 :

La suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \text{ n'existe pas}$$

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Non-continuité de f en 0 :

La suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \text{ n'existe pas}$$

car la suite $((-1)^{n+1})_{n \geq 1}$ oscille entre 1 et -1 .

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Non-continuité de f en 0 :

La suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) \text{ n'existe pas}$$

car la suite $((-1)^{n+1})_{n \geq 1}$ oscille entre 1 et -1 .

Cela prouve que f n'est pas continue en 0.

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Existence d'une primitive :

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Existence d'une primitive :

Nous avons montré que :

► $f = F'$ sur $\mathbb{R}^*$

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Existence d'une primitive :

Nous avons montré que :

- ▶ $f = F'$ sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ $F'(0) = 0$

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Existence d'une primitive :

Nous avons montré que :

- ▶ $f = F'$ sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ $F'(0) = 0$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$ tout entier (en posant $f(0) = 0$).

Question 4b : f n'est pas continue en 0 mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$

Existence d'une primitive :

Nous avons montré que :

- ▶ $f = F'$ sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ $F'(0) = 0$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$ tout entier (en posant $f(0) = 0$).

Conclusion : Cet exemple illustre qu'une fonction peut admettre une primitive sans être continue.