

Révisions d'Analyse de 1^{re} + logarithme



Exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - 2x^2 \ln x$$

- Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.
- Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Justifier que α appartient à l'intervalle $[1; e]$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

- Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$.
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

3. On considère l'algorithme suivant :

n prend la valeur 2

Tant que $\frac{\ln n}{1 + n^2} \geq h$:

$n \leftarrow n + 1$

Fin Tant que

- On affecte à la variable h la valeur 0,05. Indiquer la valeur de la variable n en sortie de l'algorithme.
- Indiquer ce que fait cet algorithme dans le cas général pour une valeur positive quelconque de la variable h .
- À quel résultat vu dans la partie 2. cet algorithme fait-il référence ?

- (a) **Limite en 0^+ :**

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$.

Par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$.

Limite en $+\infty$:

On a une forme indéterminée.

Pour tout x au voisinage de $+\infty$,

$$x^2 + 1 - 2x^2 \ln x = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x \right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Par somme, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x = -\infty$$

Par produit, on en conclut $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- (b) La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 2 \times 2x \ln x - 2x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 2x - 4x \ln x - 2x \\ &= -4x \ln x \end{aligned}$$

$x \in]0; +\infty[$, donc le signe de $g'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g(1) = 1^2 + 1 - 2 \times 1^2 \ln 1 = 1 + 1 - 0 = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
		2	
g	1	$\nearrow$	$\searrow$
			$-\infty$

- (c) La fonction g est continue sur $]0; +\infty[$.

De plus, g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Enfin, $g([1; +\infty[) =]-\infty; 2]$

et de plus, $0 \in g([1; +\infty[)$.

D'après le théorème de la bijection, $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) > 1$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; 1[$. Ainsi, globalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.

On note α cette unique solution.

- (d) Calculons $g(e)$:

$$\begin{aligned} g(e) &= e^2 + 1 - 2e^2 \ln e \\ &= e^2 + 1 - 2e^2 \times 1 \\ &= e^2 + 1 - 2e^2 \\ &= 1 - e^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - 2x^2 \ln x$$

Puisque $g(1) = 2 > 0$ et $g(e) = 1 - e^2 < 0$, et que g est continue sur $[1; e]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1; e[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donc α appartient à l'intervalle $[1; e]$.

(e) D'après l'étude précédente :

- $g(x) > 0$ pour $x \in]0; \alpha[$
- $g(\alpha) = 0$
- $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

(a) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln x \times 2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1+x^2}{x} - 2x \ln x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

En factorisant le numérateur :

$$1 + x^2 - 2x^2 \ln x = x^2 + 1 - 2x^2 \ln x = g(x)$$

Par conséquent :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

(b) **Limite en 0^+ :**

Par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$:

On a une forme indéterminée.

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(c) D'après la question 1, nous savons que :

- $g(x) > 0$ pour $x \in]0; \alpha[$
- $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$

De plus, $x > 0$ et $(1 + x^2)^2 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Par conséquent :

- $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2} > 0$ pour $x \in]0; \alpha[$
- $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2} < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

3. Algorithme

(a) L'algorithme s'arrête quand $\frac{\ln n}{1+n^2} < 0,05$.

Calculons quelques valeurs :

$$f(2) = \frac{\ln 2}{1+4} = \frac{\ln 2}{5} \approx \frac{0,693}{5} \approx 0,139 > 0,05$$

$$f(3) = \frac{\ln 3}{1+9} = \frac{\ln 3}{10} \approx \frac{1,099}{10} \approx 0,110 > 0,05$$

$$f(4) = \frac{\ln 4}{1+16} = \frac{\ln 4}{17} \approx \frac{1,386}{17} \approx 0,081 > 0,05$$

$$f(5) = \frac{\ln 5}{1+25} = \frac{\ln 5}{26} \approx \frac{1,609}{26} \approx 0,062 > 0,05$$

$$f(6) = \frac{\ln 6}{1+36} = \frac{\ln 6}{37} \approx \frac{1,792}{37} \approx 0,048 < 0,05$$

Donc $n = 6$ en sortie de l'algorithme.

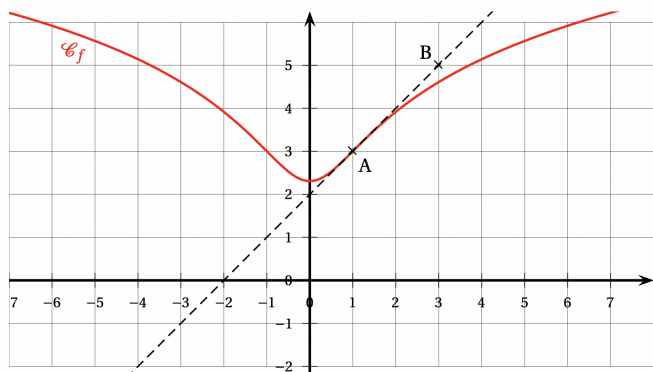
(b) Cet algorithme détermine le plus petit entier $n \geq 2$ tel que $f(n) < h$, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $\frac{\ln n}{1+n^2} < h$.

(c) Cet algorithme fait référence au fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Pour toute valeur positive h , il existe un rang à partir duquel $f(n) < h$, ce qui illustre le fait que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.



Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .



Partie A

- Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
- Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où $(a; b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
 - Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

- Montrer que f est une fonction paire.
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer l'expression de $f'(x)$. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.
- Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

- Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que, pour tout réel x , on a

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

- En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Solution de l'exercice 2

Partie A

- On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
- (a) Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, on a $ax^2 \geq 0$, donc $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme logarithme d'une fonction dérivable sur cet intervalle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$.
- (b) Les résultats du 1. peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $2a = a+1 \Leftrightarrow a = 1$ et en reportant dans la première : $\ln(1+1) + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - \ln 2$.

On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

- Quel que soit le réel x ,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 \\ &= \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire (ainsi la représentation graphique de f est symétrique par rapport de l'axe des ordonnées).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction étant paire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x , la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x$, donc : $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion : f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln 2$	$+\infty$

- D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 3 + \ln 2 &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2) \\
 &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln(4) \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$$

Partie C

- Il semble que les points de la courbe d'abscisses -1 et 1 soient des points d'inflexion.
- Comme f' est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

- On en déduit

$$\begin{aligned}
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1
 \end{aligned}$$

Donc $S = \{-1; 1\}$.

La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1 - x^2$ est positif soit sur l'intervalle $] -1; 1[$. Donc la fonction f est convexe sur $] -1; 1[$.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$

- Étudier les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = xe^x - 1$$

- En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .
- Étudier le signe de $\varphi(x)$.
- Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0; +\infty[$.
- En déduire les variations de la fonction f .
- Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \alpha^{-1}$.

Solution de l'exercice 3

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

$\varphi'(x)$ est donc du signe de $1+x$. La fonction φ est donc décroissante sur $] -\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.
 $\varphi(-1) = -e^{-1} - 1$. Par conséquent :

- sur l'intervalle $] -\infty; -1]$, $\varphi(x) < -1$. L'équation $\varphi(x) = 0$ ne possède pas de solution sur cet intervalle.
- sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, la fonction φ est continue (car dérivable) et strictement croissante.

0 appartient à l'intervalle image.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. Par conséquent, il existe un unique réel α tel que $\alpha e^\alpha = 1$. D'après la calculatrice,

$$0,567 < \alpha < 0,568$$

- Cela signifie donc que :

- φ est strictement négative sur $] -\infty; \alpha[$
- $\varphi(\alpha) = 0$
- φ est strictement positive sur $]\alpha; +\infty[$.

- La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{\varphi(x)}{x}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $\varphi(x)$. Par conséquent, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0; \alpha]$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [\alpha; +\infty[$.

- La fonction f est donc décroissante sur $]0; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
- Elle admet donc un minimum en α .

$$f(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha.$$

$$\text{Mais } \alpha e^\alpha = 1 \text{ soit } e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{ et } \alpha = e^{-\alpha}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} - \ln e^{-\alpha} \\
 &= \alpha^{-1} + \alpha
 \end{aligned}$$