

Séquence XV – Primitives



Exercice 1

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

- $a(x) = (-2x + 1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $b(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 3)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $c(x) = \frac{3}{(3x + 4)^3}$ sur $I =]-\frac{4}{3}; +\infty[$.
- $d(x) = \frac{6x - 9}{(x^2 - 3x + 2)^4}$ sur $I =]1; 2[$.
- $e(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $I =]1; +\infty[$.
- $f(x) = 3 \cos(2x) + 2 \sin(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $h(x) = \cos x - x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $i(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- $j(x) = \tan^2(2x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.
- $k(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $I =]-\pi; \pi[$.
- $\ell(x) = \cos x \times \sin^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $m(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}}$ sur $I =]-\pi; \pi[$.
- $n(x) = \sin x \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $p(x) = \tan x + \tan^3 x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- $q(x) = x(3x^2 + 1)^{\frac{5}{4}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1

- $a(x) = (-2x + 1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.

a est continue en tant que polynôme, donc a admet des primitives sur I . On reconnaît

$$a(x) = -\frac{1}{2}u'(x)u^5(x) \text{ avec } u(x) = -2x + 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{u^6(x)}{6} \\ &= -\frac{(-2x + 1)^6}{12} \end{aligned}$$

- $b(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 3)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.

b est continue en tant que polynôme, donc b admet des primitives sur I . On reconnaît

$$b(x) = u'(x)u^7(x) \text{ avec } u(x) = x^2 - 3x + 3.$$

Donc

$$B(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 3x + 3)^8$$

- $c(x) = \frac{3}{(3x + 4)^3}$ sur $I =]-\frac{4}{3}; +\infty[$.

c est continue sur I , donc c admet des primitives sur

$$I. \text{ On reconnaît } c(x) = \frac{1}{(3x + 4)^3} \times 3 = u'(x)u^{-3}(x)$$

avec $u(x) = 3x + 4$.

Donc

$$C(x) = \frac{u^{-2}(x)}{-2} = -\frac{1}{2(3x + 4)^2}$$

- $d(x) = \frac{6x - 9}{(x^2 - 3x + 2)^4}$ sur $I =]1; 2[$.

d est continue sur I , donc d admet des primitives sur

I . On remarque que $(x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$, donc

$$6x - 9 = 3(2x - 3). \text{ On reconnaît } d(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{u^4(x)}$$

avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$.

Donc

$$D(x) = 3 \times \frac{u^{-3}(x)}{-3} = -\frac{1}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

- $e(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $I =]1; +\infty[$.

e est continue sur I , donc e admet des primitives sur

$$I. \text{ On reconnaît } e(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

avec $u(x) = x^2 - 1$.

Donc

$$E(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = 3\sqrt{x^2 - 1}$$

- $f(x) = 3 \cos(2x) + 2 \sin(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

f est continue sur I , donc f admet des primitives sur I . Donc

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{\sin(2x)}{2} + 2 \times \left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right) \\ &= \frac{3 \sin(2x)}{2} - \frac{2 \cos(3x)}{3} \end{aligned}$$

- $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

g est continue sur I , donc g admet des primitives sur I . Donc

$$G(x) = \frac{\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

- $h(x) = \cos x - x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.

h est continue sur I , donc h admet des primitives sur I . On reconnaît la dérivée d'un produit, et

$$H(x) = x \cos x$$

- $i(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

i est continue sur I , donc i admet des primitives sur I . Donc

$$I(x) = 5 \tan x$$

- $j(x) = \tan^2(2x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

j est continue sur I , donc j admet des primitives sur I . On utilise l'identité $\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} - 1$ avec $u = 2x$.

Donc

$$J(x) = \frac{\tan(2x)}{2} - x$$

- $k(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $I =]-\pi; \pi[$.

k est continue sur I , donc k admet des primitives sur I . On utilise l'identité $\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} - 1$ avec $u = \frac{x}{2}$.

Donc

$$K(x) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x$$

- $\ell(x) = \cos x \times \sin^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$.

ℓ est continue sur I , donc ℓ admet des primitives sur I . On reconnaît $\ell(x) = u'(x)u^2(x)$ avec $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$.

Donc

$$L(x) = \frac{u^3(x)}{3} = \frac{\sin^3(x)}{3}$$

- $m(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}}$ sur $I =]-\pi; \pi[$.

m est continue sur I , donc m admet des primitives sur I . On reconnaît

$$m(x) = -\frac{(-\sin x)}{\sqrt{1 + \cos x}} = -\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

avec $u(x) = 1 + \cos x$.

Donc

$$M(x) = -2\sqrt{u(x)} = -2\sqrt{1 + \cos x}$$

- $n(x) = \sin x \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

n est continue sur I , donc n admet des primitives sur I .

On utilise la formule

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

avec $a = x$ et $b = 2x$.

Donc

$$n(x) = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(3x)] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos(3x)]$$

$$N(x) = \frac{1}{2}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3}\right] = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(3x)}{6}$$

- $p(x) = \tan x + \tan^3 x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

p est continue sur I , donc p admet des primitives sur I . On factorise :

$$p(x) = \tan x(1 + \tan^2 x) = \tan x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

On reconnaît

$$p(x) = -\frac{(-\sin x)}{\cos^3 x} = -\frac{u'(x)}{u^3(x)}$$

avec $u(x) = \cos x$.

Donc

$$P(x) = -\frac{u^{-2}(x)}{-2} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

- $q(x) = x(3x^2 + 1)^{\frac{5}{4}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

q est continue sur I , donc q admet des primitives sur I . On reconnaît

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{6} \times 6x \times (3x^2 + 1)^{5/4} \\ &= \frac{1}{6} u'(x) u^{5/4}(x) \end{aligned}$$

avec $u(x) = 3x^2 + 1$.

Donc

$$Q(x) = \frac{1}{6} \times \frac{u^{9/4}(x)}{9/4} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{9} u^{9/4}(x) = \frac{2}{27} (3x^2 + 1)^{9/4}$$



Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]2; +\infty[$ par

$$F(x) = (ax + b)\sqrt{x-2}$$

soit une primitive de f sur $]2; +\infty[$.

Solution de l'exercice 2

- Il faut que $x - 2 > 0 \iff x > 2$.
D'où $D_f =]2; +\infty[$.
- Si $F(x) = (ax + b)\sqrt{x-2}$, alors $F'(x)$ est de la forme :

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\sqrt{x-2} + (ax + b) \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{2a(x-2) + ax + b}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{2ax - 4a + ax + b}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{3ax - 4a + b}{2\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

Cependant, la fonction est définie par

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}} = \frac{6x}{2\sqrt{x-2}}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a &= 6 \\ -4a + b &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ -8 + b &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 8 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $F(x) = (2x + 8)\sqrt{x-2}$.



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$$

- Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
- En déduire une primitive de f sur $I =]-\infty; 1[$.

Solution de l'exercice 3

- Il faut déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$$

Pour cela, on met au même dénominateur le membre de droite :

$$\begin{aligned} \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3} &= \frac{a(x-1) + b}{(x-1)^3} \\ &= \frac{ax - a + b}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Par identification avec $\frac{2x+3}{(x-1)^3}$, on obtient :

$$ax - a + b = 2x + 3$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \begin{cases} a &= 2 \\ -a + b &= 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ -2 + b &= 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 5 \end{cases} \end{aligned}$$

- D'après la question 1, on a :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}$$

Pour trouver une primitive de f sur $I =]-\infty; 1[$, on utilise le fait que :

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$ est $x \mapsto \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-1}$
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$ est $x \mapsto \frac{(x-1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

Par conséquent, une primitive de f sur $I =]-\infty; 1[$ est :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{x-1}\right) + 5 \times \left(-\frac{1}{2(x-1)^2}\right) \\ &= -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} \end{aligned}$$



Exercice 4

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq |x|$.
En déduire que F est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer $F'(x) = f(x)$.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $\left|f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right| = 1$.
(b) En déduire que f n'est pas continue en 0 et admet cependant une primitive sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4

1. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)}{x}\right| &= \left|\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \\ &= \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \end{aligned}$$

Comme $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ pour tout $x \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x)}{x}\right| &= |x| \times \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq |x| \times 1 \\ &= |x| \end{aligned}$$

Pour montrer que F est dérivable en 0, calculons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

D'après l'inégalité précédente, pour tout $x \neq 0$:

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq |x|$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$$

Donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

2. Pour $x \neq 0$, $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$:

- $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

- $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. Donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

4. (a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 2 \times \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi)$$

Comme $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout entier n :

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} \times 0 - (-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Donc $\left|f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right| = |(-1)^{n+1}| = 1$.

- (b) La suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente,

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$$

donc la limite quand n tend vers $+\infty$ de $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)$ n'existe pas.

Cela prouve que f n'est pas continue en 0.

Cependant, $f = F'$ sur $\mathbb{R}^*$ et $F'(0) = 0$, donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$ tout entier (en posant $f(0) = 0$).

Cet exemple illustre qu'une fonction peut admettre une primitive sans être continue.



Exercice 5

On pose, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b , à déterminer, tels que $f(x)$ s'écrit $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]1; +\infty[$.
3. Déterminer celle qui s'annule en 2.

Solution de l'exercice 5

1. On cherche a et b tels que :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$$

En réduisant au même dénominateur le membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1} &= \frac{a(x - 1) + b(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{(a + b)x + (-a + b)}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Pour l'égalité, on doit avoir :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

En résolvant : $2b = 1$, donc $b = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{2}$.

Donc

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$$

2. Sur $]1; +\infty[$, on a $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc l'expression générale des primitive de f est, pour $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} (\ln|x - 1| - \ln|x + 1|) + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln(x - 1) - \ln(x + 1)) + C \text{ car } f > 0 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) + C\end{aligned}$$

3. Pour que la primitive s'annule en 2 :

$$F(2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - 1}{2 + 1} \right) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \right) + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln(3).$$

La primitive recherchée est :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) + \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3(x - 1)}{x + 1} \right)$$



Exercice 6

Soient les fonctions définies sur $I =]1; +\infty[$ par

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ et } G(x) = x - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

- Montrer que F et G sont dérivables sur I et calculer leurs dérivées.
- Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ?

Solution de l'exercice 6

1. F et G sont dérivables en tant que composée et quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I .

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$G'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. Nous avons montré que :

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = G'(x)$$

Puisque $F'(x) = G'(x)$ sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$, les fonctions F et G diffèrent d'une constante.

Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$G(x) = F(x) + C \text{ pour tout } x \in I$$

Pour déterminer C , calculons $G(x) - F(x)$ pour une valeur particulière.

Prenons $x = 2$:

- $F(2) = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$
- $G(2) = 2 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

Pour calculer $G(2)$, multiplions le numérateur et le dénominateur par $2 - \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}G(2) &= 2 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= 2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} \\ &= 2 - (2 - \sqrt{3}) \\ &= 2 - 2 + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } C = G(2) - F(2) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Les fonctions F et G sont égales sur I :

$$F(x) = G(x) \text{ pour tout } x \in]1; +\infty[$$

Séquence XV – Primitives – exercices supplémentaires



Exercice 7

Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

1. sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (3x + 1)^2 \text{ et } F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$$

2. sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \text{ et } F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

3. sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } F(x) = -4\sqrt{x}$$

Solution de l'exercice 7 On dérive F pour trouver f .



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 8

$$\phi(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 3x + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$



Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = (6x - 5)^3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.

Solution de l'exercice 9

$$\phi(x) = \frac{1}{24} (6x - 5)^4 + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.



Exercice 10

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Solution de l'exercice 10

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\} = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[$.
2. $\phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x - 5} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.



Exercice 11

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + 1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.

Solution de l'exercice 11

1. On a $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{5}; +\infty\right[$.
2. $\phi(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x + 1} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.



Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x - 4}{(3x - 5)^3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq \frac{5}{3}$, $f(x) = \frac{a}{(3x - 5)^2} + \frac{b}{(3x - 5)^3}$.
3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur son ensemble de définition.
4. Quelle est la primitive qui vaut 1 en 0?

Solution de l'exercice 12

1. Il ne faut pas que $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$.
D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\} = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}; +\infty\right[$.

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{(3x-5)^2} + \frac{b}{(3x-5)^3} \\ &= \frac{a(3x-5) + b}{(3x-5)^3} \\ &= \frac{3ax - 5a + b}{(3x-5)^3} \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -5a + b = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ -5 + b = -4 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \neq \frac{5}{3}, f(x) = \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3}.$$

3. Si $F(x) = \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{(3x-5)^2}$, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{-3}{(3x-5)^2} + \frac{-2(3x-5) \times 3}{(3x-5)^4} \\ &= \frac{-3}{(3x-5)^2} + \frac{-6}{(3x-5)^3} \end{aligned}$$

Ainsi, avec

$$F(x) = \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3x-5}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{(3x-5)^2}\right)$$

on a la dérivée suivante :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{(3x-5)^2} - \frac{1}{6} \times \frac{-2(3x-5) \times 3}{(3x-5)^4} \\ &= \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(3x-5)^2} + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{aligned} \phi(0) = 1 &\iff -\frac{1}{3} \times \frac{1}{-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{25} + k = 1 \\ &\iff \frac{1}{15} - \frac{1}{150} + k = 1 \\ &\iff k = 1 - \frac{1}{15} + \frac{1}{150} \\ &\iff k = \frac{47}{50} \end{aligned}$$

D'où la primitive recherchée est

$$\phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{47}{50}$$



Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x} \sin x.$$

1. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x , $g(x) = -g'(x) - \frac{1}{2}g''(x)$.
2. En déduire la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Solution de l'exercice 13

1. La fonction g est le produit de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ g''(x) &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x - \sin x - \cos x) \\ &= -2e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

Vérifions la relation :

$$\begin{aligned} &-g'(x) - \frac{1}{2}g''(x) \\ &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) - \frac{1}{2}(-2e^{-x} \cos x) \\ &= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\ &= e^{-x} \sin x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

2. De la relation précédente, on tire :

$$g(x) + g'(x) + \frac{1}{2}g''(x) = 0$$

Multiplions par 2 :

$$2g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 0$$

Cette équation se réécrit : $(2g + g')'(x) = -2g(x)$
Donc $2g(x) + g'(x) = -2G(x) + C$ où G est une primitive de g .

Comme $G(0) = 0$, on a $2g(0) + g'(0) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Or $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, donc $C = 1$.

Ainsi : $2g(x) + g'(x) = -2G(x) + 1$

D'où

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1 - 2g(x) - g'(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - g(x) - \frac{1}{2}g'(x) \end{aligned}$$

En substituant les expressions :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} - e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ G(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

Exercice 14

1. Soit la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 1)e^x.$$

On note $h(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction h soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Utiliser une méthode similaire pour déterminer une primitive de la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (4 \sin(2x) - 5 \cos(2x))e^{-\frac{x}{2}}$

Solution de l'exercice 14

1. Calculons $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ &= (ax^2 + (b + 2a)x + (c + b))e^x \end{aligned}$$

Pour que $h'(x) = f(x)$, on doit avoir :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 3 \\ c + b = -1 \end{cases}$$

En résolvant : $a = 2$, puis $b = 3 - 2a = -1$ et $c = -1 - b = 0$. Donc $h(x) = (2x^2 - x)e^x$.

2. Calculons $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= (2a \cos 2x - 2b \sin 2x)e^{-\frac{x}{2}} \\ &\quad + (a \sin 2x + b \cos 2x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left[\left(2a - \frac{b}{2}\right) \cos 2x + \left(-2b - \frac{a}{2}\right) \sin 2x\right]e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Pour que $G'(x) = g(x)$, on doit avoir :

$$\begin{cases} -2b - \frac{a}{2} = 4 \\ 2a - \frac{b}{2} = -5 \end{cases}$$

En résolvant ce système : De la première équation :

$a = -8 - 4b$ En substituant dans la deuxième :

$$2(-8 - 4b) - \frac{b}{2} = -5 \quad -16 - 8b - \frac{b}{2} = -5$$

$$-\frac{17b}{2} = 11 \quad b = -\frac{22}{17} \quad \text{et} \quad a = -8 - 4\left(-\frac{22}{17}\right)$$

$$\text{i.e. } a = -8 + \frac{88}{17} = \frac{-136 + 88}{17} = -\frac{48}{17}$$

$$\text{Donc } G(x) = \left(-\frac{48}{17} \sin 2x - \frac{22}{17} \cos 2x\right)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Exercice 15

Soit u la fonction définie par $u(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

1. Justifier le fait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

(a) Déterminer une relation entre f , u et u' .

(b) En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

Solution de l'exercice 15

1. La fonction u est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \\ &= 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

2. On a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ et $u'(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Observons que :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{u(x)}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= u(x) \times f(x) \end{aligned}$$

Donc $u'(x) = u(x) \times f(x)$,

ce qui donne $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

3. De la relation précédente, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, on déduit que f admet pour primitive $\ln |u(x)| + C$.

Comme $u(x) = x + \sqrt{1 + x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\sqrt{1 + x^2} > |x| \geq -x$),

on a $\ln |u(x)| = \ln(u(x))$.

L'expression générale d'une primitive de f est donc $F(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$.

On a de plus $F(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) + C = 0$. Donc $C = -\ln(1 + \sqrt{2})$.

La primitive recherchée est

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(1 + \sqrt{2}) \\ &= \ln\left(\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{1 + \sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Séquence XV – Logarithmes



Exercice 16

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $\ln(6 - 4x)$ | g) $\ln(3x - 5)$ |
| b) $\ln(x^2)$ | h) $\frac{\ln(3x + 1)}{\ln(2x - 1)}$ |
| c) $\ln(3 - x) + \ln(x - 2)$ | i) $\ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right)$ |
| d) $\ln(3 - x) \times \ln(2 - x)$ | j) $\frac{\ln(3x + 2)}{x - 2}$ |
| e) $\ln(3 - x) + \ln(2 - x)$ | k) $\ln(e^x + 1)$ |
| f) $\ln(e^{-x} - 1)$ | |

Solution de l'exercice 16 Pour que $\ln(u)$ ait un sens, il faut que $u > 0$.

a)

$$6 - 4x > 0 \iff -4x > -6$$

$$\iff x < \frac{3}{2}$$

Donc $x \in]-\infty; \frac{3}{2}[$

b)

$$x^2 > 0 \iff x \neq 0$$

Donc $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

c) Il faut :

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

Donc $x \in]2; 3[$

d) Il faut :

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3 \\ x < 2 \end{cases}$$

Donc $x \in]-\infty; 2[$

e) Même condition que c), donc $x \in]-\infty; 2[$

f)

$$e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > 1$$

$$\iff e^{-x} > e^0$$

$$\iff -x > 0$$

$$\iff x < 0$$

Donc $x \in]-\infty; 0[$

g)

$$3x - 5 > 0 \iff 3x > 5$$

$$\iff x > \frac{5}{3}$$

Donc $x \in \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$

h) Il faut :

$$\begin{cases} 3x + 1 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ \ln(2x - 1) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ 2x - 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Donc $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$

i)

$$\frac{x + 2}{1 - x} > 0 \iff (x + 2)(1 - x) > 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\iff -(x + 2)(x - 1) > 0$$

$$\iff (x + 2)(x - 1) < 0$$

Par tableau de signes, on obtient $x \in]-2; 1[$

j) Il faut :

$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Donc $x \in \left] -\frac{2}{3}; 2 \right[\cup]2; +\infty[$

k) $e^x + 1 > 0$ est toujours vrai car $e^x > 0$, donc $x \in \mathbb{R}$



Exercice 17

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

$$a = \ln(64) \quad b = \ln\left(\frac{1}{216}\right)$$

$$c = \ln\left(\frac{32}{27}\right) \quad d = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Solution de l'exercice 17

$$a = \ln(64) = \ln(2^6) = 6 \ln(2)$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{216}\right) = \ln(1) - \ln(216)$$

$$= 0 - \ln(6^3) = -3 \ln(6)$$

$$= -3 \ln(2 \times 3) = -3 [\ln(2) + \ln(3)]$$

$$= -3 \ln(2) - 3 \ln(3)$$

$$c = \ln\left(\frac{32}{27}\right) = \ln(32) - \ln(27)$$

$$= \ln(2^5) - \ln(3^3)$$

$$= 5 \ln(2) - 3 \ln(3)$$

$$d = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$$

Exercice 18

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

Solution de l'exercice 18 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) &= \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) \\ &= 2 \ln(\sqrt{x})\end{aligned}$$

De plus, $\ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln(x)$. Donc $\ln(x) = 2 \ln(\sqrt{x})$, ou encore $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

Exercice 19

Écrire sous une autre forme :

$$a = \ln(8) - 4 \ln(2) + 3 \ln(4) - \ln(16)$$

$$b = 8 \ln(2)$$

$$c = \ln(2e^x) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{e^{4x}}{2}\right)$$

$$d = \ln(4) - 2 \ln(2)$$

$$f = 6 \ln(3) - 5$$

$$g = \ln(1 + e^x) + \ln(1 + e^{-x})$$

Solution de l'exercice 19

$$\begin{aligned}a &= \ln(2^3) - 4 \ln(2) + 3 \ln(2^2) - \frac{\ln(2^3)}{2} \\ &= 3 \ln(2) - 4 \ln(2) + 6 \ln(2) - \frac{3 \ln(2)}{2} \\ &= \left(3 - 4 + 6 - \frac{3}{2}\right) \ln(2) \\ &= \frac{7}{2} \ln(2)\end{aligned}$$

$$b = 8 \ln(2) = \ln(2^8) = \ln(256)$$

$$\begin{aligned}c &= \ln(2e^x) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{e^{4x}}{2}\right) \\ &= \ln(2) + x + \frac{1}{4} [4x - \ln(2)] \\ &= \ln(2) + x + x - \frac{\ln(2)}{4} \\ &= 2x + \frac{3 \ln(2)}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d &= \ln(4) - 2 \ln(2) = \ln(2^2) - 2 \ln(2) \\ &= 2 \ln(2) - 2 \ln(2) = 0\end{aligned}$$

$$f = 6 \ln(3) - 5 = \ln(3^6) - 5 = \ln(729) - 5$$

$$\begin{aligned}g &= \ln(1 + e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln[(1 + e^x)(1 + e^{-x})] \\ &= \ln(1 + e^x + e^{-x} + 1) \\ &= \ln(2 + e^x + e^{-x})\end{aligned}$$

Exercice 20

Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

$$a = -\exp(\ln(1/2)) + 4$$

$$b = e^{\ln(4)}$$

$$c = e^{\ln(5)} - e^{\ln(9)} + 2e^{\ln(3)}$$

$$d = e^{\frac{1}{2} \ln(8)} \times e^{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$f = \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) - x$$

Solution de l'exercice 20

$$\begin{aligned}a &= -\exp(\ln(1/2)) + 4 \\ &= -\frac{1}{2} + 4 \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Ce n'est pas un entier.

$$b = e^{\ln(4)} = 4$$

C'est un entier.

$$\begin{aligned}c &= e^{\ln(5)} - e^{\ln(9)} + 2e^{\ln(3)} \\ &= 5 - 9 + 2 \times 3 \\ &= 5 - 9 + 6 = 2\end{aligned}$$

C'est un entier.

$$\begin{aligned}d &= e^{\frac{1}{2} \ln(8)} \times e^{\ln(\frac{1}{2})} \\ &= e^{\ln(8^{1/2})} \times \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{8} \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ce n'est pas un entier.

$$\begin{aligned}
 f &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) - x \\
 &= \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1}\right) - x \\
 &= \ln\left(\frac{e^x + 1}{\frac{1+e^x}{e^x}}\right) - x \\
 &= \ln\left(\frac{e^x(e^x + 1)}{1 + e^x}\right) - x \\
 &= \ln(e^x) - x \\
 &= x - x = 0
 \end{aligned}$$

C'est un entier.

Exercice 21

Soit un réel $a > 0$.

- a) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
- b) Déterminer pour quelle valeur de a la tangente correspondante passe par l'origine.

Solution de l'exercice 21

a) Au point d'abscisse a : $f(a) = \ln(a)$ et $f'(a) = \frac{1}{a}$
L'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned}y - \ln(a) &= \frac{1}{a}(x - a) \\y &= \frac{1}{a}x - 1 + \ln(a)\end{aligned}$$

b) Pour que la tangente passe par l'origine, il faut que le point $(0, 0)$ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{a} \times 0 - 1 + \ln(a) \\0 &= -1 + \ln(a) \\1 &= \ln(a) \\a &= e\end{aligned}$$

Exercice 22

Résoudre les équations suivantes :

- a) $\ln(2x - 5) = k$ b) $\ln(x - 4) = \ln(2x - 1)$
- c) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$
- d) $\ln(2x - 7) + \ln(4x - 9) = -\ln(3)$

Solution de l'exercice 22

a) Condition d'existence : $2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\ln(2x - 5) &= k \\2x - 5 &= e^k \\2x &= e^k + 5 \\x &= \frac{e^k + 5}{2}\end{aligned}$$

Cette solution est valable car $\frac{e^k + 5}{2} > \frac{5}{2}$ (puisque $e^k > 0$).

b) Conditions d'existence :

$$x > 4 \text{ et } 2x - 1 > 0 \iff x > 4$$

$$\begin{aligned}\ln(x - 4) &= \ln(2x - 1) \iff x - 4 = 2x - 1 \\&\iff -x = 3 \\&\iff x = -3\end{aligned}$$

Mais $-3 < 4$, donc il n'y a pas de solution.

c) Condition d'existence : $x > 0$

Posons $X = \ln(x)$:

$$\begin{aligned}X^2 - 3X + 2 &= 0 \\(X - 1)(X - 2) &= 0 \\X &= 1 \text{ ou } X = 2\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln(x) = 1 &\iff x = e \\ \ln(x) = 2 &\iff x = e^2\end{aligned}$$

d) Conditions d'existence :

$$2x - 7 > 0 \text{ et } 4x - 9 > 0 \iff x > \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}\ln(2x - 7) + \ln(4x - 9) &= -\ln(3) \\&\iff \ln[(2x - 7)(4x - 9)] = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\&\iff (2x - 7)(4x - 9) = \frac{1}{3} \\&\iff 8x^2 - 18x - 28x + 63 = \frac{1}{3} \\&\iff 8x^2 - 46x + 63 = \frac{1}{3} \\&\iff 24x^2 - 138x + 189 = 1 \\&\iff 24x^2 - 138x + 188 = 0 \\&\iff 12x^2 - 69x + 94 = 0\end{aligned}$$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= 69^2 - 4 \times 12 \times 94 \\&= 4761 - 4512 = 249\end{aligned}$$

Les solutions sont : $x_1 = \frac{69 + \sqrt{249}}{24}$ et $x_2 = \frac{69 - \sqrt{249}}{24}$.
Seule x_1 convient.



Exercice 23

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x-8) \geq 0$ b) $\ln(2+x) + 1 < 0$

c) $2\ln(3-x) + 1 > 0$

d) $\ln(3x) + \ln(x-1) \leq \ln(6)$

Solution de l'exercice 23

a) Condition d'existence : $x-8 > 0 \iff x > 8$

$$\ln(x-8) \geq 0$$

$$\ln(x-8) \geq \ln(1)$$

$$x-8 \geq 1$$

$$x \geq 9$$

Solution : $x \in [9; +\infty[$

b) Condition d'existence : $2+x > 0 \iff x > -2$

$$\ln(2+x) + 1 < 0$$

$$\ln(2+x) < -1$$

$$\ln(2+x) < \ln(e^{-1})$$

$$2+x < \frac{1}{e}$$

$$x < \frac{1}{e} - 2$$

Solution : $x \in]-2; \frac{1}{e} - 2[$

c) Condition d'existence : $3-x > 0 \iff x < 3$

$$2\ln(3-x) + 1 > 0$$

$$2\ln(3-x) > -1$$

$$\ln(3-x) > -\frac{1}{2}$$

$$\ln(3-x) > \ln(e^{-1/2})$$

$$3-x > e^{-1/2}$$

$$-x > e^{-1/2} - 3$$

$$x < 3 - e^{-1/2}$$

Solution : $x \in]-\infty; 3 - e^{-1/2}[$

d) Conditions d'existence :

$3x > 0$ et $x-1 > 0 \iff x > 1$

$$\ln(3x) + \ln(x-1) \leq \ln(6)$$

$$\ln[3x(x-1)] \leq \ln(6)$$

$$3x(x-1) \leq 6$$

$$3x^2 - 3x \leq 6$$

$$3x^2 - 3x - 6 \leq 0$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$(x-2)(x+1) \leq 0$$

Par tableau de signes : $x \in [-1; 2]$

Avec la condition $x > 1$: Solution : $x \in]1; 2]$



Exercice 24

Déterminer les limites aux bornes des fonctions :

$$f(x) = x - 2\ln(x) \quad h(x) = e^{-x} \ln(x)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)} \quad i(x) = x \ln(x) - \ln(x+1)$$

Solution de l'exercice 24

Corrigé en classe (cf photos)



Exercice 25

Étudier les fonctions f définies par :

a) $f(x) = x + \frac{1}{\ln(x)}$ b) $f(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ d) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Solution de l'exercice 25



Exercice 26

a) Soit a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que : $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$

b) Donner une conséquence graphique de cette inégalité.

Solution de l'exercice 26



Exercice 27

Déterminer la dérivée des fonctions f telles que :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ d) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ e) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + x + 1})$

c) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

Solution de l'exercice 27

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Domaine : $\mathbb{R}$ (car $x^2 + 1 > 0$ toujours)

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Domaine : il faut $\frac{x-1}{x+1} > 0$, soit $(x-1)(x+1) > 0$ et $x \neq -1$

Par tableau de signes : $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x-1} \times \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x+1}{x-1} \times \frac{2}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{2}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

Domaine : $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$,

i.e. $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$

Domaine : il faut $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} > 0$

Comme $e^x + e^{-x} > 0$ toujours, il faut $e^x - e^{-x} > 0$, soit $e^x > e^{-x}$, soit $x > -x$, soit $x > 0$.

Domaine : $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \times \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \times \frac{e^{2x} - e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \times \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{4}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\
 &= \frac{4}{e^{2x} - e^{-2x}}
 \end{aligned}$$

e) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + x + 1}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1)$

Domaine : il faut $x^2 + x + 1 > 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif, donc $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \\
 &= \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)}
 \end{aligned}$$

Séquence XV – Logarithmes – exercices plus difficiles



Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire que, pour tout entier n strictement positif, $\ln(u_n) \leq 1$.
 - Si la suite (u_n) est convergente, par quel nombre peut-on majorer sa limite ?
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $v_n = \ln(u_n)$.
 - Donner $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
 - En déduire que la suite (v_n) converge vers 1.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

En multipliant par n :

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

Or :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \\ &= n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(u_n) \leq 1$$

- Si (u_n) converge vers ℓ , alors $\ln(u_n)$ tend vers $\ln(\ell)$ par continuité du logarithme. Comme $\ln(u_n) \leq 1$, on a $\ln(\ell) \leq 1$, donc :

$$\ell \leq e$$

- C'est une limite classique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- Soit $v_n = \ln(u_n)$ pour $n \geq 1$. On a :

$$v_n = \ln(u_n) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

En posant $X = \frac{1}{n}$, quand n tend vers $+\infty$, on a X tend vers 0 et :

$$v_n = n \ln(1+X) = \frac{\ln(1+X)}{X}$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

- Comme $v_n = \ln(u_n)$ tend vers 1, par continuité de l'exponentielle :

$$u_n = e^{v_n} \text{ tend vers } e^1 = e$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. En s'inspirant de la méthode précédente, posons :

$$w_n = \ln \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right] = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

En posant $X = \frac{x}{n}$, quand n tend vers $+\infty$, on a X tend vers 0 et :

$$w_n = n \ln(1+X) = \frac{x \ln(1+X)}{X}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = x \times 1 = x$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Solution de l'exercice 28

- Calcul des premiers termes :

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

- Soit $f(x) = \ln(1+x) - x$ pour $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1 - (1+x)}{1+x} \\ &= \frac{-x}{1+x} \leq 0 \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

Donc f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$, on a $f(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Donc :

$$\ln(1+x) \leq x \text{ pour tout } x \geq 0$$

- Soit $n \geq 1$. On a $\frac{1}{n} \geq 0$, donc d'après la question précédente :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Exercice 29

On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

(a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = 1$.

(c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Solution de l'exercice 29

1. Soit $x > 0$. Nous allons établir l'encadrement en utilisant les inégalités fondamentales du logarithme. Considérons la fonction $g(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. On a :

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}$$

Pour $0 < t < 1$, $g'(t) < 0$ donc g est décroissante. Pour $t > 1$, $g'(t) > 0$ donc g est croissante.

Donc g admet un minimum en $t = 1$ avec $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$. Ainsi $g(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$, soit :

$$\ln t \geq 1 - \frac{1}{t}$$

De même, considérons la fonction $h(t) = \ln t - t + 1$ pour $t > 0$. On a :

$$h'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$$

Pour $0 < t < 1$, $h'(t) > 0$ donc h est croissante. Pour $t > 1$, $h'(t) < 0$ donc h est décroissante.

Donc h admet un maximum en $t = 1$ avec $h(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$. Ainsi $h(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$, soit :

$$\ln t \leq t - 1$$

En appliquant ces inégalités à $t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$:

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

$$1 - \frac{x}{x+1} \leq \ln \left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

$$\frac{x+1-x}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2. (a) Soit $x > 0$. On a :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Posons $h(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

D'après la question 1, on a :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1}$$

Donc $h'(x) > 0$, ce qui signifie que h est strictement croissante.

Comme $f(x) = e^{h(x)}$ et que l'exponentielle est strictement croissante, f est strictement croissante.

(b) On a :

$$\ln(f(x)) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, on a u tend vers 0^+ et :

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln(1+u)}{u}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

(c) Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^1 = e$$

Exercice 30

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Solution de l'exercice 30 Soit $x > 0$. Utilisons la propriété : $a^b = e^{b \ln a}$ pour $a > 0$.

L'équation devient :

$$e^{x \ln x} = e^{x \ln(x^x)}$$

Comme l'exponentielle est bijective, cela équivaut à :

$$x^x \ln x = x \ln(x^x)$$

Or $\ln(x^x) = x \ln x$, donc : $x^x \ln x = x \times x \ln x = x^2 \ln x$.
L'équation devient : $x^x \ln x = x^2 \ln x$.

Premier cas : Si $\ln x \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq 1$), on peut diviser par $\ln x$, et on obtient : $x^x = x^2$

Cela donne : $e^{x \ln x} = e^{2 \ln x}$. Donc $x \ln x = 2 \ln x$

Puisque $\ln x \neq 0$, on peut diviser par $\ln x$, d'où $x = 2$

Vérifions : pour $x = 2$, on a :

$$x^x = 2^2 = 4 \text{ et } x^2 = 4$$

Donc l'équation est satisfaite.

Deuxième cas : Si $\ln x = 0$, alors $x = 1$.

Vérifions : pour $x = 1$, on a :

$$x^{x^x} = 1^{1^1} = 1^1 = 1$$

$$(x^x)^x = (1^1)^1 = 1^1 = 1$$

Donc $x = 1$ est aussi solution.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\{1, 2\}$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + x$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[0; +\infty[$, que l'on notera α_n .

2. Donner α_1 .

3. (a) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $f(\alpha_n) = n$, démontrer que la suite (α_n) est croissante.

(b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

4. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, $\ln(n - \ln n) \leq \alpha_n \leq \ln n$.

5. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\ln n}\right)$.

Solution de l'exercice 31

1. Soit $f(x) = e^x + x$. La fonction f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

On a :

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \text{ pour tout } x \geq 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus :

$$f(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq n$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de f , il existe un unique $\alpha_n \in [0; +\infty[$ tel que $f(\alpha_n) = n$.

Pour $n = 0$, on a $f(0) = 1 > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0; +\infty[$.

2. Pour $n = 1$, on cherche α_1 tel que $f(\alpha_1) = 1$.
Comme :

$$f(0) = e^0 + 0 = 1$$

on a $\alpha_1 = 0$.

3. (a) Soit $n \geq 1$. On a $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$.
Comme $n < n+1$ et que f est strictement croissante, on a $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Donc la suite (α_n) est strictement croissante.

(b) Supposons par l'absurde que (α_n) soit majorée par un réel M . Comme (α_n) est croissante et majorée, elle converge vers une limite $\ell \leq M$.

Par continuité de f , on a :

$$f(\alpha_n) \rightarrow f(\ell)$$

Or $f(\alpha_n) = n$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que $f(\ell)$ soit fini.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

4. Soit $n \geq 1$. On a :

$$f(\alpha_n) = e^{\alpha_n} + \alpha_n = n$$

Majoration : Si $\alpha_n \geq \ln n$, alors $e^{\alpha_n} \geq n$, donc :

$$n = e^{\alpha_n} + \alpha_n \geq n + \ln n > n$$

ce qui est une contradiction. Donc :

$$\alpha_n < \ln n$$

Minoration : Soit n assez grand.

Si $\alpha_n \leq \ln(n - \ln n)$, alors $e^{\alpha_n} \leq n - \ln n$, donc :

$$n = e^{\alpha_n} + \alpha_n$$

$$\leq (n - \ln n) + \ln(n - \ln n)$$

$$= n - \ln n + \ln(n - \ln n)$$

Cela donne :

$$\ln n \leq \ln(n - \ln n)$$

$$n \leq n - \ln n$$

$$\ln n \leq 0$$

ce qui est impossible pour $n \geq 2$.

Donc :

$$\alpha_n \geq \ln(n - \ln n)$$

pour n assez grand.

5. On a établi :

$$\ln(n - \ln n) \leq \alpha_n \leq \ln n$$

Divisant par $\ln n$:

$$\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leq \frac{\alpha_n}{\ln n} \leq 1$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} &= \frac{\ln n + \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)}{\ln n} = 0$$

et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = 1$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n} = 1$$



Exercice 32

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que la suite (H_n) est strictement croissante.

2. (a) Démontrer que, pour tout réel $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x$$

(b) En déduire que, pour tout entier k strictement positif,

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$H_n \geq \ln(n+1)$$

Que peut-on en déduire pour la suite (H_n) ?

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif, par $u_n = H_n - \ln n$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

(b) Que peut-on en déduire ?

Solution de l'exercice 32

1. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= H_n + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n+1} > 0$, on a $H_{n+1} > H_n$. Donc la suite (H_n) est strictement croissante.

2. (a) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$ pour $x > -1$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1 - (1+x)}{1+x} \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on a $g'(x) < 0$, donc g est décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $x \in]-1, 0[$, on a $g'(x) > 0$, donc g est croissante sur $] -1, 0[$.

Donc g admet un maximum en $x = 0$ avec :

$$g(0) = \ln(1) - 0 = 0$$

Par conséquent, $g(x) \leq 0$ pour tout $x > -1$, ce qui donne :

$$\ln(1+x) \leq x$$

(b) Soit $k \geq 1$. Posons $x = \frac{1}{k} > 0$. D'après la question précédente :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Or :

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln(k+1) - \ln k\end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

(c) En sommant l'inégalité précédente de $k = 1$ à $k = n$:

$$\sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Le membre de gauche est une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] &= \ln(n+1) - \ln(1) \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(n+1) \leq H_n$$

Comme $\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la suite (H_n) tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit $n \geq 1$. On a $u_n = H_n - \ln n$ et $u_{n+1} = H_{n+1} - \ln(n+1)$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

D'après la question 2a, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &\geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

De plus :

$$\begin{aligned}u_n &= H_n - \ln n \\ &\geq \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0\end{aligned}$$

Donc (u_n) est minorée par 0.

(b) La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

Exercice 33

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . On appelle **dérivée logarithmique de f** la fonction notée $\mathcal{L}(f)$ définie sur I par

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f'}{f}$$

On remarque qu'il s'agit de la dérivée de $\ln(f)$.

1. Soit f et g deux fonctions strictement positives et dérivables sur I . Montrer que

$$(a) \quad \mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g).$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g).$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Utiliser la dérivée logarithmique de f pour déterminer f' .

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x^4(2x-5)^3}{(x^2+3)^2 e^{6x}}$$

Déterminer la dérivée de la fonction g .

Solution de l'exercice 33

1. (a) Soient f et g deux fonctions dérivables et strictement positives. On a :

$$\mathcal{L}(fg) = \frac{(fg)'}{fg}$$

Or $(fg)' = f'g + fg'$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(fg) &= \frac{f'g + fg'}{fg} \\ &= \frac{f'g}{fg} + \frac{fg'}{fg} \\ &= \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \\ &= \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)\end{aligned}$$

- (b) Soient f et g deux fonctions dérivables avec $f > 0$ et $g > 0$. On a :

$$\mathcal{L}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)'$$

Or $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\frac{f'g - fg'}{g^2}}{\frac{f}{g}} \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \times \frac{g}{f} \\ &= \frac{f'g - fg'}{fg} \\ &= \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \\ &= \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g)\end{aligned}$$

2. Soit $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. La fonction f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$. On peut utiliser la dérivée logarithmique sur les intervalles où $f(x) > 0$. On a :

$$\ln |f(x)| = \ln |x| + \ln |x-1| + \ln |x-2| + \ln |x-3|$$

(quand $f(x) \neq 0$).

En dérivant :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Donc :

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$$

Soit :

$$\begin{aligned}f'(x) &= x(x-1)(x-2)(x-3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)\end{aligned}$$

En développant :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) \\ &\quad + x(x-1)(x-3) + x(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

3. Soit $g(x) = \frac{x^4(2x-5)^3}{(x^2+3)^2e^{6x}}$. Sur le domaine où $g(x) > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln |g(x)| &= \ln |x^4| + \ln |(2x-5)^3| - \ln |(x^2+3)^2| \\ &\quad - \ln |e^{6x}| \\ &= 4 \ln |x| + 3 \ln |2x-5| - 2 \ln (x^2+3) - 6x\end{aligned}$$

En dérivant :

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{4}{x} + \frac{3 \times 2}{2x-5} - \frac{2 \times 2x}{x^2+3} - 6 \\ &= \frac{4}{x} + \frac{6}{2x-5} - \frac{4x}{x^2+3} - 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } g'(x) &= g(x) \left(\frac{4}{x} + \frac{6}{2x-5} - \frac{4x}{x^2+3} - 6 \right) \\ \text{i.e. } g'(x) &= \frac{x^4(2x-5)^3}{(x^2+3)^2e^{6x}} \left(\frac{4}{x} + \frac{6}{2x-5} - \frac{4x}{x^2+3} - 6 \right)\end{aligned}$$



Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

- Donner u_1 et démontrer que $u_2 = \frac{7}{12}$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$.
 - En déduire le sens de variation de (u_n) .
 - Démontrer que, pour tout entier n non nul, $u_n \leq 1$.
 - En déduire que (u_n) est convergente.
- Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

- En déduire que, pour tout entier p strictement positif, $\frac{1}{p+1} \leq \ln \left(\frac{p+1}{p} \right) \leq \frac{1}{p}$.
- Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$
 - En déduire que la limite de la suite (u_n)

Solution de l'exercice 34

1. Calcul des premiers termes :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

2. (a) Soit $n \geq 1$. On a :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$. Comme $\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$, on a $u_{n+1} > u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

(c) Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $n+k \geq n+1$, donc $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$.

Ainsi :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

3. (a) Soit $f(x) = \ln x - (x-1) = \ln x - x + 1$ pour $x > 0$. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Pour $x \in]0, 1[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
Pour $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

Donc f admet un maximum en $x = 1$ avec $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$.

Soit $g(x) = \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. On a :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Pour $x \in]0, 1[$, $g'(x) < 0$ donc g est décroissante.
Pour $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante.

Donc g admet un minimum en $x = 1$ avec $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $g(x) \geq 0$, soit $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

(b) Soit $p \geq 1$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{p+1}{p}$:

$$1 - \frac{1}{\frac{p+1}{p}} \leq \ln \left(\frac{p+1}{p} \right) \leq \frac{p+1}{p} - 1$$

$$\text{Or } \frac{1}{\frac{p+1}{p}} = \frac{p}{p+1} \text{ et } \frac{p+1}{p} - 1 = \frac{p+1-p}{p} = \frac{1}{p}.$$

Donc :

$$1 - \frac{p}{p+1} \leq \ln \left(\frac{p+1}{p} \right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{Or } 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{p+1-p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

Donc :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln \left(\frac{p+1}{p} \right) \leq \frac{1}{p}$$

4. (a) Soit $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité précédente pour $p = n, n+1, \dots, 2n-1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2} \leq \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1}$$

:

$$\frac{1}{2n} \leq \ln \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \leq \frac{1}{2n-1}$$

En sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n+k-1} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1}$$

Le terme du milieu est une somme télescopique :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n+k-1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) + \dots + \ln \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2n}{n} \right) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \leq \ln 2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} = u_n - \frac{1}{2n}$ (en enlevant le dernier terme).

Donc :

$$\ln 2 \leq \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2n}$$

Finalement :

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

(b) De l'encadrement précédent :

$$\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$$

Exercice 35

On admet le résultat suivant : si x est « proche de 0 », alors $\ln(1+x) \approx x$.

Par exemple, $\ln(1+0,02) = \ln(1,02) = 0,0198$ à 10^{-4} donc $\ln(1+0,02) \approx 0,02$.

Voici l'affirmation d'un banquier : « Pour estimer le nombre d'années qu'il faut à un capital placé à intérêts composés pour doubler, il suffit de diviser 70 par le taux d'intérêt. »

1. Montrer que le nombre d'années n nécessaires au doublement d'un capital placé à t % d'intérêts composés vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{t}{100})}$.

2. Soit $N = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{t}{100})}$.

(a) En considérant que $\frac{t}{100}$ est proche de 0, donner une valeur approchée de N en fonction de t .

(b) En déduire que $Nt \approx 70$.

3. Déterminer le nombre d'années nécessaires au doublement d'un capital placé à

(a) 3% (taux du livret A en 2024).

(b) 5% (taux proposé par la très compétente Samira Bien)

(c) 10% (taux proposé par l'obscur Charles Attand).

Solution de l'exercice 35

1. Soit C_0 le capital initial et C_n le capital après n années. Avec un taux d'intérêt de $t\%$, on a :

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Pour que le capital double, il faut $C_n = 2C_0$, soit :

$$C_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = 2C_0$$

Donc :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = 2$$

En prenant le logarithme :

$$n \ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \ln 2$$

Donc :

$$n = \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

2. (a) Soit $t > 0$ un taux proche de 0. En utilisant l'approximation $\ln(1+x) \approx x$ pour x proche de 0, avec $x = \frac{t}{100}$:

$$\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100}$$

Donc :

$$\begin{aligned} N &= \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right)} \\ &\approx \frac{\ln 2}{\frac{t}{100}} \\ &= \frac{100 \ln 2}{t} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$N \approx \frac{100 \ln 2}{t}$$

donc :

$$Nt \approx 100 \ln 2$$

Or $\ln 2 \approx 0,693$, donc :

$$100 \ln 2 \approx 69,3 \approx 70$$

Ainsi $Nt \approx 70$, ce qui justifie la règle du banquier.

3. (a) Pour $t = 3\%$:

$$N = \frac{\ln 2}{\ln(1,03)} = \frac{0,693}{0,0296} \approx 23,4 \text{ années}$$

Avec la règle des 70 :

$$\frac{70}{3} \approx 23,3 \text{ années}$$

(b) Pour $t = 5\%$:

$$N = \frac{\ln 2}{\ln(1,05)} = \frac{0,693}{0,0488} \approx 14,2 \text{ années}$$

Avec la règle des 70 :

$$\frac{70}{5} = 14 \text{ années}$$

(c) Pour $t = 10\%$:

$$N = \frac{\ln 2}{\ln(1,10)} = \frac{0,693}{0,0953} \approx 7,3 \text{ années}$$

Avec la règle des 70 :

$$\frac{70}{10} = 7 \text{ années}$$

