

Séquence XV – Primitives



Exercice 1

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

- $a(x) = (-2x + 1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $b(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 3)^7$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $c(x) = \frac{3}{(3x + 4)^3}$ sur $I =]-\frac{4}{3}; +\infty[$.
- $d(x) = \frac{6x - 9}{(x^2 - 3x + 2)^4}$ sur $I =]1; 2[$.
- $e(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $I =]1; +\infty[$.
- $f(x) = 3 \cos(2x) + 2 \sin(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $h(x) = \cos x - x \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $i(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- $j(x) = \tan^2(2x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.
- $k(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $I =]-\pi; \pi[$.
- $\ell(x) = \cos x \times \sin^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $m(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}}$ sur $I =]-\pi; \pi[$.
- $n(x) = \sin x \sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $p(x) = \tan x + \tan^3 x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- $q(x) = x(3x^2 + 1)^{\frac{5}{4}}$ sur $I = \mathbb{R}$.



Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]2; +\infty[$ par

$$F(x) = (ax + b)\sqrt{x-2}$$

soit une primitive de f sur $]2; +\infty[$.



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + 3}{(x - 1)^3}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
2. En déduire une primitive de f sur $I =]-\infty; 1[$.



Exercice 4

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq |x|$.
En déduire que F est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer $F'(x) = f(x)$.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $\left|f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right| = 1$.
(b) En déduire que f n'est pas continue en 0 et admet cependant une primitive sur $\mathbb{R}$.



Exercice 5

On pose, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b , à déterminer, tels que $f(x)$ s'écrive $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]1; +\infty[$.
3. Déterminer celle qui s'annule en 2.



Exercice 6

Soient les fonctions définies sur $I =]1; +\infty[$ par

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ et } G(x) = x - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

1. Montrer que F et G sont dérivables sur I et calculer leurs dérivées.
2. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ?

Séquence XV – Primitives – exercices supplémentaires



Exercice 7

Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

1. sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (3x + 1)^2 \text{ et } F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$$

2. sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \text{ et } F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

3. sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } F(x) = -4\sqrt{x}$$



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.



Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = (6x - 5)^3$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.



Exercice 10

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur chaque intervalle de son ensemble de définition.



Exercice 11

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + 1}}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.



Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x - 4}{(3x - 5)^3}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq \frac{5}{3}$, $f(x) = \frac{a}{(3x - 5)^2} + \frac{b}{(3x - 5)^3}$.
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur son ensemble de définition.
- Quelle est la primitive qui vaut 1 en 0?



Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x} \sin x.$$

- Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x , $g(x) = -g'(x) - \frac{1}{2}g''(x)$.
- En déduire la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.



Exercice 14

1. Soit la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 1)e^x.$$

On note $h(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction h soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Utiliser une méthode similaire pour déterminer une primitive de la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (4 \sin(2x) - 5 \cos(2x))e^{-\frac{x}{2}}$



Exercice 15

Soit u la fonction définie par $u(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

- Justifier le fait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.
 - Déterminer une relation entre f , u et u' .
 - En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

Séquence XV – Logarithmes

Exercice 16

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $\ln(6 - 4x)$ | g) $\ln(3x - 5)$ |
| b) $\ln(x^2)$ | h) $\frac{\ln(3x + 1)}{\ln(2x - 1)}$ |
| c) $\ln(3 - x) + \ln(x - 2)$ | i) $\ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right)$ |
| d) $\ln(3 - x) \times \ln(2 - x)$ | j) $\frac{\ln(3x + 2)}{x - 2}$ |
| e) $\ln(3 - x) + \ln(2 - x)$ | k) $\ln(e^x + 1)$ |
| f) $\ln(e^{-x} - 1)$ | |

Exercice 17

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

$$\begin{aligned} a &= \ln(64) & b &= \ln\left(\frac{1}{216}\right) \\ c &= \ln\left(\frac{32}{27}\right) & d &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Exercice 18

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

Exercice 19

Écrire sous une autre forme :

$$\begin{aligned} a &= \ln(8) - 4 \ln(2) + 3 \ln(4) - \ln(16) \\ b &= 8 \ln(2) \\ c &= \ln(2e^x) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{e^{4x}}{2}\right) \\ d &= \ln(4) - 2 \ln(2) \\ f &= 6 \ln(3) - 5 \\ g &= \ln(1 + e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

Exercice 20

Montrer que les nombres suivants sont des entiers :

$$\begin{aligned} a &= -\exp(\ln(1/2)) + 4 \\ b &= e^{\ln(4)} \\ c &= e^{\ln(5)} - e^{\ln(9)} + 2e^{\ln(3)} \\ d &= e^{\frac{1}{2} \ln(8)} \times e^{\ln(\frac{1}{2})} \\ f &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) - x \end{aligned}$$

Exercice 21

Soit un réel $a > 0$.

- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
- Déterminer pour quelle valeur de a la tangente correspondante passe par l'origine.

Exercice 22

Résoudre les équations suivantes :

- $\ln(2x - 5) = k$
- $\ln(x - 4) = \ln(2x - 1)$
- $(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) + 2 = 0$
- $\ln(2x - 7) + \ln(4x - 9) = -\ln(3)$

Exercice 23

Résoudre les inéquations suivantes :

- $\ln(x - 8) \geq 0$
- $\ln(2 + x) + 1 < 0$
- $2 \ln(3 - x) + 1 > 0$
- $\ln(3x) + \ln(x - 1) \leq \ln(6)$

Exercice 24

Déterminer les limites aux bornes des fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2 \ln(x) & h(x) &= e^{-x} \ln(x) \\ g(x) &= \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)} & i(x) &= x \ln(x) - \ln(x + 1) \end{aligned}$$

Exercice 25

Étudier les fonctions f définies par :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x + \frac{1}{\ln(x)} & \text{b) } f(x) &= \frac{1 + 2 \ln(x)}{x} \\ \text{c) } f(x) &= \frac{1}{\ln(x)} & \text{d) } f(x) &= \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Exercice 26

a) Soit a et b deux réels strictement positifs.

$$\text{Montrer que : } \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$$

- Donner une conséquence graphique de cette inégalité.

Exercice 27

Déterminer la dérivée des fonctions f telles que :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \ln(x^2 + 1) & \text{d) } f(x) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \\ \text{b) } f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & \text{e) } f(x) &= \ln(\sqrt{x^2 + x + 1}) \\ \text{c) } f(x) &= \ln(e^x - 1) \end{aligned}$$

Séquence XV – Logarithmes – exercices plus difficiles

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- (a) Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, $\ln(u_n) \leq 1$.
(c) Si la suite (u_n) est convergente, par quel nombre peut-on majorer sa limite?
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n strictement positif, par $v_n = \ln(u_n)$.

(a) Donner $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(b) En déduire que la suite (v_n) converge vers 1.

- En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 29

On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}$.

- Démontrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

- Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = 1$.
- En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 30

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + x$$

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $[0; +\infty[$, que l'on notera α_n .
- Donner α_1 .
- (a) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $f(\alpha_n) = n$, démontrer que la suite (α_n) est croissante.
(b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.
- Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, $\ln(n - \ln n) \leq \alpha_n \leq \ln n$.
- En déduire la limite de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\ln n}\right)$.

Exercice 32

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- Démontrer que la suite (H_n) est strictement croissante.
- (a) Démontrer que, pour tout réel $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x$$

- En déduire que, pour tout entier k strictement positif,

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$H_n \geq \ln(n+1)$$

Que peut-on en déduire pour la suite (H_n) ?

- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif, par $u_n = H_n - \ln n$.
(a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
(b) Que peut-on en déduire?

Exercice 33

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . On appelle **dérivée logarithmique** de f la fonction notée $\mathcal{L}(f)$ définie sur I par

$$\mathcal{L}(f) = \frac{f'}{f}$$

On remarque qu'il s'agit de la dérivée de $\ln(f)$.

1. Soit f et g deux fonctions strictement positives et dérivables sur I . Montrer que

(a) $\mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$.

(b) $\mathcal{L}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Utiliser la dérivée logarithmique de f pour déterminer f' .

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x^4(2x-5)^3}{(x^2+3)^2 e^{6x}}$$

Déterminer la dérivée de la fonction g .

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

1. Donner u_1 et démontrer que $u_2 = \frac{7}{12}$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$.
- (b) En déduire le sens de variation de (u_n) .
- (c) Démontrer que, pour tout entier n non nul, $u_n \leq 1$.
- (d) En déduire que (u_n) est convergente.
3. (a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

- (b) En déduire que, pour tout entier p strictement positif, $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.
- (b) En déduire que la limite de la suite (u_n)

Exercice 35

On admet le résultat suivant : si x est « proche de 0 », alors $\ln(1+x) \approx x$.

Par exemple, $\ln(1+0,02) = \ln(1,02) = 0,0198$ à 10^{-4} donc $\ln(1+0,02) \approx 0,02$.

Voici l'affirmation d'un banquier : « Pour estimer le nombre d'années qu'il faut à un capital placé à intérêts composés pour doubler, il suffit de diviser 70 par le taux d'intérêt. »

1. Montrer que le nombre d'années n nécessaires au doublement d'un capital placé à t % d'intérêts composés vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$.

2. Soit $N = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$.

- (a) En considérant que $\frac{t}{100}$ est proche de 0, donner une valeur approchée de N en fonction de t .

- (b) En déduire que $Nt \approx 70$.

3. Déterminer le nombre d'années nécessaires au doublement d'un capital placé à

- (a) 3% (taux du livret A en 2024).
- (b) 5% (taux proposé par la très compétente Samira Bien)
- (c) 10% (taux proposé par l'obscur Charles Attand).