

Compléments d'analyse

1. Primitives

Exemple :

La fonction $R : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables. Calculons la dérivée de R :

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{x}}{2} \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

On dit que la fonction R est **une primitive** de la fonction racine carrée sur $]0; +\infty[$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que : $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Remarque : Dans l'exemple précédent, les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto R(x) - 4$ mais aussi $x \mapsto R(x) + \sqrt{2}$ et plus généralement $x \mapsto R(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$, sont aussi des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

1. Pour tout réel k , la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto F(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I .

2. Toute primitive de f sur I est de la forme

$$x \mapsto F(x) + k$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

1. Soit F_k définie sur I par : $F_k(x) = F(x) + k$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_k'(x) &= F'(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que F_k est une primitive de f sur I .

2. Soit G une primitive quelconque de f sur I . Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I, (G - F)'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car F et G sont deux primitives de f sur I . La dérivée de la fonction $G - F$ étant nulle sur I , on en déduit que la fonction $G - F$ est une fonction constante sur I . Il existe donc un réel k tel que : $\forall x \in I, (G - F)(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$. $\square$

Calculs pratiques : Par lecture inverse des formules usuelles de dérivation, on obtient le tableau suivant :

Fonction f	Intervalle de validité I	Primitive F de f sur I
$f(x) = a$ où $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$	$F(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = \tan x$
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$

De plus, si u et v sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I :

Fonction f	Intervalle de validité I	Primitive F de f sur I
$f = u'u^n$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	I	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	Tout intervalle inclus dans I sur lequel u ne s'annule pas.	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Tout intervalle inclus dans I sur lequel $u > 0$.	$F(x) = \sqrt{u}$
$f = u' \cos u$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin u$
$f = u' \sin u$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos u$
$f = u'e^u$	I	$F(x) = e^u$

Exemple :

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = x^5 - x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} - x + 7$$

2. $f(x) = x^3 - \frac{5}{x^2} + 2e^x$ sur $I =]0; +\infty[$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{x} + 2e^x$$

3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ sur $I =]-\infty; -1[$.

On reconnaît $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

avec $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

4. $f(x) = 5xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

On reconnaît

$$f(x) = \frac{5}{2} \times 2x \times e^{x^2} = \frac{5}{2}u'(x)e^{u(x)}$$

avec $u(x) = x^2$. Donc

$$F(x) = \frac{5}{2}e^{x^2}$$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4}$ sur $I = [0; +\infty[$

On reconnaît

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3(x^2 + 1)}{(x^3 + 3x + 1)^4} = \frac{1}{3}u'(x)u(x)^{-4}$$

avec $u(x) = x^3 + 3x + 1$

et $u'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(x^3 + 3x + 1)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3}$$

Remarque : Pour certaines fonctions, l'existence de primitives n'est pas « immédiate ». Par exemple, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$ ou $x \mapsto e^{-x^2}$.

Le théorème suivant, que l'on admettra, apporte une réponse quant à leur existence.

■ THÉORÈME :

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Exemple :

La fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = |x|$$

est continue sur $\mathbb{R}$: le théorème affirme donc que f admet des primitives.

Vérifier que la fonction F définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \frac{1}{2}x|x|$ est en effet une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que $F'(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}x \times x \\ &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

donc $F'(x) = x = |x|$.

- Pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}x \times (-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

donc $F'(x) = -x = |x|$.

- En $x = 0$: calculons les dérivées à droite et à gauche.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2} \\ &= 0 \\ &= |0| \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{2} \\ &= 0 \\ &= |0|\end{aligned}$$

Donc $F'(0) = 0 = |0|$.
Ainsi F est bien une primitive de f .

Remarques :

- Toute fonction f continue sur I admet donc une infinité de primitives sur I .
- La fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: le théorème affirme donc que f admet des primitives. Mais dans ce cas, inutile d'en chercher une expression : un théorème dû à Liouville (XIX^e siècle) montre que cette fonction n'admet aucune primitive s'exprimant **à l'aide des fonctions usuelles** (exponentielle, trigonométrique, etc.).
- Il existe une fonction f non continue sur $\mathbb{R}$ et admettant cependant une primitive sur $\mathbb{R}$ (cf. ex XV.4, à connaître) l'hypothèse de continuité du théorème est donc suffisante mais pas nécessaire.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. La fonction f étant continue sur I , le théorème précédent assure l'existence d'une primitive G de f sur I . D'après la proposition 2 de la première page, toutes ses primitives sont alors de la forme $F_k : x \mapsto G(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}F(x_0) = y_0 &\iff G(x_0) + k = y_0 \\ &\iff k = y_0 - G(x_0)\end{aligned}$$

ce qui définit une unique valeur de k et donc une unique primitive F définie sur I par :

$$F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$$

□

Exemple :

- Déterminer l'unique primitive F de la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

qui vaut $y_0 = 0$ en $x_0 = -1$.

L'expression générale d'une primitive de f est

$$F_k(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

On cherche F telle que $F(-1) = 0$.

$$\begin{aligned}F_k(-1) &= \frac{(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} - 4(-1) + k \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 + k \\ &= \frac{-2 + 9 + 24}{6} + k \\ &= \frac{31}{6} + k\end{aligned}$$

Pour que $F(-1) = 0$, il faut $k = -\frac{31}{6}$. Donc

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x - \frac{31}{6}$$

- Quelle est l'unique primitive F de la fonction f définie sur $I =]3; +\infty[$ par, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

qui vaut $y_0 = 3$ en $x_0 = 5$?

On reconnaît

$$f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

avec $u(x) = x^2 - 9$ et $u'(x) = 2x$. L'expression générale d'une primitive est

$$F_k(x) = \sqrt{x^2 - 9} + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$. On cherche F telle que $F(5) = 3$.

$$\begin{aligned}F_k(5) &= \sqrt{25 - 9} + k \\ &= \sqrt{16} + k \\ &= 4 + k\end{aligned}$$

Pour que $F(5) = 3$, il faut $4 + k = 3$, donc $k = -1$. Donc

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 1$$

2. La fonction logarithme népérien

A. Rappels

■ DÉFINITION :

On appelle **fonction logarithme népérien** et on note $\ln$ la bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ qui est la réciproque de la fonction exponentielle.

■ COROLLAIRE :

- $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y) = y$
et $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln x} = x$
- $$\begin{cases} \ln x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = e^y \\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$$
- $e^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$
- $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$
- Une fonction bijective et sa bijection réciproque étant de même monotonie, la fonction logarithme est une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (a; b) \in]0; +\infty[^2, \ln a = \ln b \iff a = b$$

$$\forall (a; b) \in]0; +\infty[^2, \ln a > \ln b \iff a > b > 0$$

Exemple :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{4x+1} = 2$.

$$\begin{aligned} e^{4x+1} = 2 &\iff 4x + 1 = \ln(2) \\ &\iff 4x = \ln(2) - 1 \\ &\iff x = \frac{\ln(2) - 1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(2) - 1}{4} \right\}.$$

2. $\ln(2x^2 - 3) = \ln(5x)$.

Cette équation nécessite tout d'abord que $2x^2 - 3 > 0$ et $5x > 0$,

c'est-à-dire $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x > 0$,

i.e. $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned} \ln(2x^2 - 3) = \ln(5x) &\iff 2x^2 - 3 = 5x \\ &\iff 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 25 + 24 = 49, \text{ donc } x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \text{ et } \\ x_2 &= \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}. \text{ Seul } x = 3 \text{ vérifie la condition } \\ x &> \sqrt{\frac{3}{2}}. \text{ Donc } \mathcal{S} = \{3\} \end{aligned}$$

3. $\ln(2x - 3) \leq 5$.

Il faut d'abord $2x - 3 > 0$, soit $x > \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \ln(2x - 3) \leq 5 &\iff 2x - 3 \leq e^5 \\ &\iff 2x \leq e^5 + 3 \\ &\iff x \leq \frac{e^5 + 3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc la solution est } \mathcal{S} = \left] \frac{3}{2}; \frac{e^5 + 3}{2} \right].$$

B. Propriétés algébriques

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout couple de réels strictement positifs $(x; y)$ et pour tout entier n :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$

Démonstration. Soit $(x; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

- $e^{\ln(xy)} = xy$ par définition de la fonction logarithme.

Mais on peut écrire que : $xy = e^{\ln x} e^{\ln y}$ pour la même raison. On en déduit que :

$$e^{\ln(xy)} = e^{\ln x} e^{\ln y}$$

donc, avec les propriétés de l'exponentielle :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

c'est cette propriété qui a historiquement motivé l'invention des logarithmes.

- Comme précédemment, $e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$.

On a aussi, $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}$. Donc

$$\frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

i.e.

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Il vient que

$$e^{\ln \frac{1}{x}} = e^{-\ln x}$$

On en conclut que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{y} \\ &= \ln x - \ln y\end{aligned}$$

• On raisonne par disjonction de cas :

- Si $n \in \mathbb{N}$, on procède par récurrence.
Pour $n = 0$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$.
Supposons la propriété vraie au rang n ,
montrons-la au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}\ln(x^{n+1}) &= \ln(x^n \times x) \\ &= \ln(x^n) + \ln(x) \\ &= n \ln(x) + \ln(x) \\ &= (n + 1) \ln(x)\end{aligned}$$

- Si $n \in \mathbb{Z}^-$, alors posons $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\ln(x^n) &= \ln(x^{-p}) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x^p}\right) \\ &= -\ln(x^p) \\ &= -p \ln(x) \\ &= n \ln(x)\end{aligned}$$

□

Exemple :

- Soient a et b deux réels strictement positifs.
Exprimer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$:

$$\ln(a^2 b^3) \text{ et } 6 \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}}$$

$$\begin{aligned}\ln(a^2 b^3) &= \ln(a^2) + \ln(b^3) \\ &= 2 \ln(a) + 3 \ln(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 b}}\right) &= 6 \ln\left((a^2 b)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(a^2 b) \\ &= -3 \ln(a^2 b) \\ &= -3(2 \ln(a) + \ln(b)) \\ &= -6 \ln(a) - 3 \ln(b)\end{aligned}$$

2. Simplifier $\frac{\ln(\sqrt{5} + 1) + \ln(\sqrt{5} - 1)}{\ln 2}$

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\sqrt{5} + 1) + \ln(\sqrt{5} - 1)}{\ln 2} &= \frac{\ln((\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1))}{\ln 2} \\ &= \frac{\ln(5 - 1)}{\ln 2} \\ &= \frac{\ln 4}{\ln 2} \\ &= \frac{\ln(2^2)}{\ln 2} \\ &= \frac{2 \ln 2}{\ln 2} \\ &= 2\end{aligned}$$

3. Résoudre

$$(E_1) : \ln((x - 2)(x - 1)) = \ln 2$$

$$\text{et } (E_2) : \ln(x - 2) + \ln(x - 1) = \ln 2$$

Pour la première équation :

il faut $(x - 2)(x - 1) > 0$,

i.e. $x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

$$\begin{aligned}\ln((x - 2)(x - 1)) &= \ln 2 \iff (x - 2)(x - 1) = 2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 2 \\ &\iff x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(x - 3) = 0\end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x = 3$. Ces deux valeurs vérifient la condition de l'ensemble de définition. Donc $\mathcal{S} = \{0; 3\}$

Pour la deuxième équation :

il faut $x - 2 > 0$ et $x - 1 > 0$, i.e. $x > 2$.

$$\begin{aligned}\ln(x - 2) + \ln(x - 1) &= \ln 2 \\ \iff \ln((x - 2)(x - 1)) &= \ln 2\end{aligned}$$

On retrouve la même équation que précédemment, mais seul $x = 3$ vérifie la condition $x > 2$. Donc $\mathcal{S} = \{3\}$

C. Étude de la fonction logarithme népérien

■ PROPRIÉTÉ :

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Autrement dit, pour tout $x > 0$,

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0$$

Exemples :

1. Trouver la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x} - 4$ qui s'annule en 1.

Une expression générale de la primitive de f est

$$F(x) = 3 \ln x - 4x + k$$

où $k \in \mathbb{R}$. Pour que $F(1) = 0$, on doit avoir

$$3 \ln 1 - 4 \times 1 + k = 0 \text{ i.e. } 0 - 4 + k = 0 \\ \text{i.e. } k = 4$$

Donc $F(x) = 3 \ln x - 4x + 4$.

2. Déterminer les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto x - \ln x$

g est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \\ = \frac{x-1}{x}$$

- Pour $x \in]0; 1[$, $x - 1 < 0$ et $x > 0$, donc $g'(x) < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur $]0; 1[$.
- Pour $x \in]1; +\infty[$, $x - 1 > 0$ et $x > 0$, donc $g'(x) > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Ainsi g admet un minimum en $x = 1$ avec $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

Démonstration de la propriété précédente. On va admettre que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour trouver l'expression de la fonction dérivée, introduisons la fonction f définie pour tout $x \in]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$. Il est clair que pour tout $x > 0$, $f(x) = x$ et donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1$.

Mais d'autre part, le théorème de dérivation d'une fonction composée donne :

$$\forall x > 0, f'(x) = (\ln)'(x)e^{\ln x}$$

On en déduit, que pour tout $x > 0$,

$$(\ln)'(x)e^{\ln x} = 1$$

et donc que

$$(\ln)'(x) \times x = 1$$

et finalement

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

Ainsi, la fonction logarithme népérien est une primitive de la fonction inverse et $\ln 1 = 0$. $\square$

Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'en déduire :

■ PROPRIÉTÉ :

Si la fonction u est strictement positive et dérivable sur l'intervalle I , la fonction $\ln u$ est dérivable et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

Justifier la dérivabilité de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$$

sur $I =]1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
Posons $u(x) = x^2 - 1$. Sur $]1; +\infty[$, on a

$$u(x) = x^2 - 1 > 1 - 1 = 0$$

donc $u(x) > 0$. De plus, u est dérivable sur $]1; +\infty[$ avec $u'(x) = 2x$. Donc $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \\ = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Inversement, on en déduit :

■ PROPRIÉTÉ :

Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I , alors une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln u$.

Plus généralement, si la fonction u est dérivable et non nulle sur l'intervalle I , alors une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln |u|$.

Exemples :

1. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2} + 3}$$

On reconnaît une expression du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{x^2} + 3$ et $u'(x) = 2xe^{x^2}$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} + 3} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

Une primitive de f est F définie par

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{x^2} + 3) + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$ car $e^{x^2} + 3$ est strictement positif.

2. Donner une primitive sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ de la fonction $\tan$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On reconnaît une expression du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$.

Ici, $\tan x = -\frac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $\tan$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} F(x) &= -\ln |\cos x| + k \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + k \end{aligned}$$

sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos x > 0$, donc

$$F(x) = -\ln(\cos x) + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Donner une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

On reconnaît $g(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive est g est G définie par $G(x) = \ln |\ln x| + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$, donc

$$G(x) = \ln(\ln x) + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

■ PROPRIÉTÉ : (Limites)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

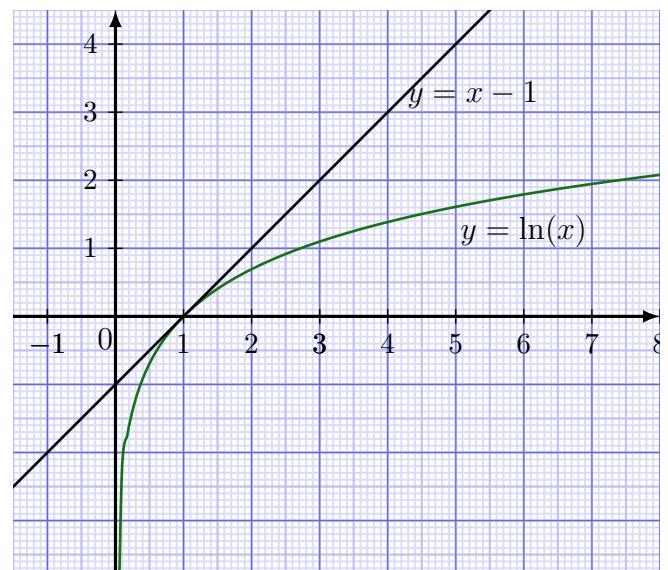
■ PROPRIÉTÉ :

la fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Donc la fonction $\ln$ est concave. Sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes.

Si l'on considère la tangente au point d'abscisse 1, on en tire cette inégalité de convexité souvent utile :

■ PROPRIÉTÉ :

$$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$$



■ PROPRIÉTÉ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Démonstration.

On s'intéresse à la forme indéterminée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$: qu'on va lever à l'aide de la fonction exponentielle et du changement de variable : $x = e^y$, i.e. $y = \ln x$ pour $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^y)}{e^y} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car on sait que : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$.

De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right)$$

en posant $X = \frac{1}{x}$ (alors X tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+).

Or

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} (-\ln(X)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la démonstration précédente.

Enfin,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

est le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$ en 0, i.e.

$$f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

□

Exemples :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln \sqrt{x})$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \times \frac{1}{2} \ln x \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ tend vers $-\infty$. Pour lever cette indétermination, on écrit

$$\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1 + x \ln x}{x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = 1$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

3. Puissances d'un réel

A. Notation a^n et a^b

Soit a un réel strictement positif et n un entier.

- Si $n > 0$, le sens donné à a^n est : $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- Si $n < 0$, alors le sens de a^n est : $\frac{1}{a^{-n}}$.
- Enfin, si $n = 0$, alors $a^0 = 1$.

Remarquons que dans tous les cas, on peut écrire : $a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln a}$

Comme le nombre $e^{b \ln a}$ a un sens même si b est un réel non entier, on va **étendre** la notation a^b aux cas où b n'est pas forcément entier de la manière suivante :

■ DÉFINITION :

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque. Le nombre $e^{b \ln a}$ sera noté a^b .

Exemple :

2^π signifie $e^{\pi \ln 2} \approx 8,82$.

Remarque : si $a > 0$ et que b et b' sont deux réels quelconques :

$$\begin{aligned} a^b \times a^{b'} &= e^{b \ln a} \times e^{b' \ln a} \\ &= e^{b \ln a + b' \ln a} \\ &= e^{(b+b') \ln a} \\ &= a^{b+b'} \end{aligned}$$

On remarquera que cette notation est cohérente avec toutes les propriétés habituelles des puissances :

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tous réels a et a' strictement positifs et pour tous réels b et b' :

$$\begin{aligned} \ln(a^b) &= b \ln a & (a^b)^{b'} &= a^{bb'} \\ a^{b+b'} &= a^b a^{b'} & (aa')^b &= a^b a'^b \\ a^{b-b'} &= \frac{a^b}{a^{b'}} & \left(\frac{a}{a'} \right)^b &= \frac{a^b}{a'^b}. \end{aligned}$$

B. Fonctions puissances d'exposant non entier

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La définition précédente donne un sens à la notation x^α où $x > 0$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. De plus, le théorème de dérivation des fonctions de la forme e^u assure la dérivabilité sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ de dérivée $\alpha \times \frac{1}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

Plus généralement :

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I alors la fonction u^α l'est aussi et

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

Exemples :

1. La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$, définie sur $]0; +\infty[$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \text{ et } \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On retrouve ainsi la dérivée de la fonction racine carrée.

2. La formule est aussi utile pour trouver des primitives : une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est la fonction G définie par

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} x^1 \times x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \end{aligned}$$

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{2}{3}}} = (1 + \sin^2 x)^{-\frac{2}{3}}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{3} \times 2 \sin x \cos x (1 + \sin^2 x)^{-\frac{2}{3}-1} \\ &= -\frac{4}{3} \sin x \cos x (1 + \sin^2 x)^{-\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

4. Fonctions racine n -ième

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur lui-même : pour tout $y > 0$, il existe donc un unique réel $x > 0$ tel que : $x^n = y$.

Or

$$\begin{aligned} x^n = y &\iff n \ln x = \ln y \\ &\iff \ln x = \frac{1}{n} \ln y \\ &\iff x = e^{\frac{1}{n} \ln y} \\ &\iff x = e^{\ln(y^{\frac{1}{n}})} \\ &\iff x = y^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

ce nombre sera appelé racine n -ième de y .

■ DÉFINITION :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On appelle **fonction racine n -ième** et on note $\sqrt[n]{\dots}$ la fonction définie sur

$$[0; +\infty[\text{ par : } \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \sqrt[10]{1024} &= 1024^{\frac{1}{10}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

5. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes de base a

■ DÉFINITION :

Soit a un réel strictement positif.

On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a^x$.

Remarque : La fonction exponentielle est donc la fonction exponentielle de base e .

Étudions rapidement ces fonctions.

Si $a = 1$, la fonction f_a est constante. On écarte ce cas dans la suite.

Par définition, pour tout réel x , $f_a(x) = e^{x \ln a}$.

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln a > 0 \text{ donc si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } \ln a < 0 \text{ donc si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ln a > 0 \text{ donc si } a > 1 \\ 0 & \text{si } \ln a < 0 \text{ donc si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_a'(x) = \ln(a) \times e^{x \ln a}$$

qui est donc du signe de $\ln a$, lequel dépend de la position de a par rapport à 1.

On obtient donc deux tableaux de variations différents selon la valeur de a .

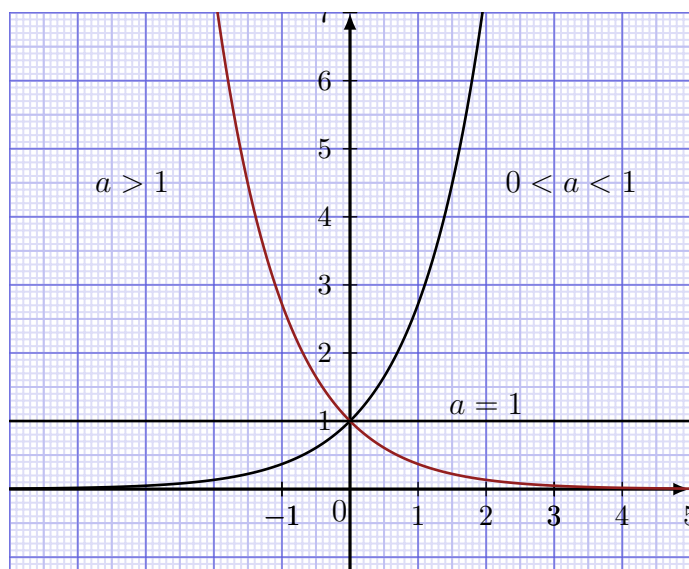
Si $a > 1$,

x	$-\infty$	$+\infty$
f_a	0	$+\infty$

Si $0 < a < 1$,

x	$-\infty$	$+\infty$
f_a	$+\infty$	0

Et les courbes suivantes :



Remarque : Noter que la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ est $x \mapsto \ln a \times a^x$ et non pas la dérivée obtenue avec une fonction puissance.

Aux fonctions exponentielles de base $a \neq 1$, qui sont toutes des bijections de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$ sont associées leurs bijections réciproques, les fonctions logarithmes de base a .

■ DÉFINITION :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **fonction logarithme de base a** la fonction notée $\log_a$, bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a .

Pour tout $x > 0$,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Démonstration. Pour tout a réel strictement positif et différent de 1 et tout $y > 0$,

$$\begin{aligned} a^x = y &\iff e^{x \ln a} = y \\ &\iff x \ln a = \ln y \\ &\iff x = \frac{\ln y}{\ln a} \text{ car } a \neq 1 \end{aligned}$$

Donc l'unique antécédent de y par la fonction exponentielle de base a est $\frac{\ln y}{\ln a}$ ce qui montre que

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

□

Remarques :

1. Quelle que soit la base a , et quels que soient les réels strictement positifs x et y :

- $\log_a(a^x) = x$
- La relation fonctionnelle est toujours la même

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} \\ &= \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} \\ &= \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \\ &= \log_a(x) + \log_a(y) \end{aligned}$$

2. En pratique, le logarithme en base 10, notée simplement $\log$ est utile en sciences, par exemple pour les mesures du pH, de l'intensité du bruit en dB, de l'intensité d'un tremblement de terre avec l'échelle de Richter.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \log(10^x) = x.$$

3. Dans le cas où on serait amené à manipuler des inéquations avec logarithmes de base $a \neq e$ (notamment dans certains exercices sur les suites, ou en probabilités...), la propriété suivante est utile à connaître

■ PROPRIÉTÉ :

Les fonctions logarithmes de base a , avec $0 < a < 1$, sont des fonctions strictement décroissantes sur $]0; +\infty[$.

Exemple :

En décembre 2018, le plus grand nombre premier connu est $p = 2^{82\,589\,933} - 1$: combien ce nombre a-t-il de chiffres en écriture décimale ?

Remarquons tout d'abord qu'un nombre entier x s'écrit avec n chiffres en écriture décimale si :

$$10^{n-1} \leq x < 10^n$$

Or

$$\begin{aligned} 10^{n-1} \leq x < 10^n &\iff \log(10^{n-1}) \leq \log x < \log(10^n) \\ &\iff n-1 \leq \log x < n \\ &\iff n-1 = \lfloor \log x \rfloor \\ &\iff n = \lfloor \log x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Observons par ailleurs que $2^{82\,589\,933}$ et $p = 2^{82\,589\,933} - 1$ s'écrivent avec le même nombre de chiffres en base 10 car le chiffre des unités de $2^{82\,589\,933}$ est 2, 4, 6 ou 8 donc jamais 0, et donc en retranchant 1, on garde le même nombre de chiffres.

Ainsi, le nombre de chiffres de p est

$$\begin{aligned} \lfloor \log 2^{82\,589\,933} \rfloor + 1 &= \lfloor 82\,589\,933 \log 2 \rfloor + 1 \\ &= 24\,862\,048 \end{aligned}$$

Le calcul détaillé :

$$\begin{aligned} \log(2^{82\,589\,933}) &= 82\,589\,933 \times \log(2) \\ &\approx 82\,589\,933 \times 0,30103 \\ &\approx 24\,862\,047,4 \end{aligned}$$

Donc $\lfloor \log(2^{82\,589\,933}) \rfloor = 24\,862\,047$. Le nombre de chiffres est donc $24\,862\,047 + 1 = 24\,862\,048$ chiffres.

■ PROPRIÉTÉ : Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$.

- On cherche à lever la forme indéterminée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$

Remarquons que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Ainsi, en posant $X = x^\alpha$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X}$$

Or, on a vu que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

- On s'intéresse à la forme indéterminée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$

Remarquons que, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x^\alpha} &= \frac{e^x}{e^{\alpha \ln x}} \\ &= e^{x - \alpha \ln x} \\ &= e^{x(1 - \frac{\alpha \ln x}{x})} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et donc, comme $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

□

Remarque : On pourra retenir que la fonction $\ln$ est dominée à l'infini par toute fonction puissance, en particulier par la fonction racine carrée. De même, toute fonction puissance est dominée à l'infini par la fonction exponentielle.

Exemples :

Calculer :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (10^{99} \ln x - \sqrt{x}).$

On factorise par le terme dominant.

$$\begin{aligned} 10^{99} \ln x - \sqrt{x} &= \sqrt{x} \left(10^{99} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{x} \left(10^{99} \frac{\ln x}{x^{1/2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (10^{99} \ln x - \sqrt{x}) = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{100} - e^x)$

$$x^{100} - e^x = e^x \left(\frac{x^{100}}{e^x} - 1 \right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{100} - e^x) = -\infty$$