



LIVRET D'EXERCICES POUR PRÉPARER LA RENTRÉE

Première SMP 2 - Terminale SMP 2

Été 2025

Ce livret d'exercices est une compilation d'exercices trouvés sur les manuels libres disponibles sur le site Pearltrees ainsi que sur le livret de transition Première - Terminale du lycée Henri IV (et quelques annales du baccalauréat national). Le travail des collègues a été modifié à la marge afin de respecter les spécificités du programme du lycée franco-allemand.

Je remercie les collègues ayant travaillé sur ces exercices de les avoir généreusement mis en ligne.

Aux élèves de 1SMP2 : Vous pouvez vous approprier ce livret pour réviser pour la rentrée ou pour réviser avant un chapitre. Ce livret ne revêt aucun caractère obligatoire.

Ce livret peut comporter des erreurs (j'espère le moins possible). N'hésitez pas à me faire remonter vos doutes.

Enfin, l'accent est mis sur certaines notions. On ne parlera par exemple pas de nombres premiers ou de géométrie dans l'espace, et très peu de racines carrées de nombres complexes. Il a fallu faire des choix, et je pense plus pertinent que vous soyez à l'aise avec la divisibilité et les calculs avec les nombres complexes pour aborder l'année. Mais ne vous inquiétez pas, ces notions reviendront !

Table des matières

1	Arithmétique - Divisibilité (Manuel libre - Pearltrees)	2
2	Nombres complexes (Manuel libre - Pearltrees)	4
3	Suites (Lycée Henri IV)	9
4	Matrices (Manuel libre - Pearltrees)	15
5	Produit scalaire et repérage (Lycée Henri IV)	19
6	Analyse Partie 1 (Lycée Henri IV)	23
7	Analyse Partie 2 (Annales du baccalauréat)	23

Pour information, et pour que vous puissiez choisir comment mettre des priorités dans votre travail, la progression **envisagée** (je peux la modifier !) des chapitres en terminale SMP est la suivante :

- Analyse (partie 3/3) primitives, logarithme népérien, logarithme naturel et exponentielle de base a)
- Suites (partie 3/3) : Théorèmes de convergence, suites adjacentes
- Dénombrement
- Probabilités (partie 2/3) : probabilités conditionnelles, loi binomiale
- Matrices (partie 2/2) : Suites de matrices, marche aléatoire sur un graphe et chaînes de Markov
- Équations différentielles
- Nombres complexes (partie 2/3) : Formes trigonométrique et exponentielle, point de vue géométrique des nombres complexes
- Arithmétique (partie 2/3) : Congruences
- Géométrie dans l'espace (partie 2/2) : Produit scalaire dans l'espace, équations cartésiennes de plan et produit vectoriel
- Calcul intégral
- Nombres complexes (partie 3/3) : Similitudes
- Arithmétique (partie 3/3) : Théorèmes de Gauss et de Bézout, équations diophantiennes, petit théorème de Fermat, application au chiffrement
- Probabilités (partie 3/3) : Probabilités continues et échantillonnage
- Révisions!!!

1 Arithmétique - Divisibilité (Manuel libre - Pearltrees)



Exercice 1

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :
Soient a, b, c des entiers relatifs.

Proposition : si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid b + c$.

Solution de l'exercice 1

La proposition est vraie.

Démonstration :

Si $a \mid b$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}, b = ka$.

Si $a \mid c$ alors $\exists k' \in \mathbb{Z}, c = k'a$.

Ainsi $b + c = (k + k')a$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$.

Donc $a \mid b + c$.



Exercice 2

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :
Soient a, b, c des entiers relatifs.

Proposition : si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $ab \mid c$.

Solution de l'exercice 2

La proposition est fausse comme le montre le contre-exemple suivant.

Prenons $6 \mid 12$, alors $4 \mid 12$ et pourtant $24 \nmid 12$.



Exercice 3

Démontrer que, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, l'entier $18p - 33q$ est divisible par 3.

Solution de l'exercice 3

Soit $p, q \in \mathbb{Z}$.

$$18p - 33q = 3(6p - 11q)$$

avec $6p - 11q \in \mathbb{Z}$, donc $18p - 33q$ est divisible par 3.



Exercice 4

Déterminer les entiers relatifs n tels que 7 divise $n + 13$.

Solution de l'exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que 7 divise $n + 13$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n + 13 = 7k$ et donc $n = 7k - 13$.

Réciproquement, si $n = 7k - 13$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\begin{aligned} n + 13 &= 7k - 13 + 13 \\ &= 7k \end{aligned}$$

est divisible par 7.

Ainsi, l'ensemble des entiers relatifs n tels que 7 divise $n + 13$ est $\{7k - 13 : k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour être plus exhaustif, cet ensemble est $\{\dots; -20; -13; -6; 1; 8; 15; 22; \dots\}$.



Exercice 5

Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n - 2$ divise 17.

Solution de l'exercice 5

L'ensemble des diviseurs de 17 est

$$\mathcal{D}(17) = \{-17; -1; 1; 17\}$$

On a donc quatre cas :

- $3n - 2 = -17 \Leftrightarrow 3n = -15 \Leftrightarrow n = -5$ (pas de solution dans $\mathbb{Z}$)
- $3n - 2 = -1 \Leftrightarrow 3n = 1$ (pas de solution dans $\mathbb{Z}$)
- $3n - 2 = 1 \Leftrightarrow 3n = 3 \Leftrightarrow n = 1$
- $3n - 2 = 17 \Leftrightarrow 3n = 19$ (pas de solution dans $\mathbb{Z}$)

Finalement, les seuls entiers n tels que $3n - 2$ divise 17 sont -5 et 1 .



Exercice 6

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'entier $8n + 6$ n'est jamais divisible par 4.

Solution de l'exercice 6

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $8n + 6$ est divisible par 4.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $8n + 6 = 4k$.

On a alors :

$$\begin{aligned} 8n + 6 &= 4k \\ 6 &= 4k - 8n \\ 6 &= 4(k - 2n) \end{aligned}$$

donc 4 divise 6 : c'est absurde.

Par conséquent, $8n + 6$ n'est pas divisible par 4.



Exercice 7

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 2^n$ est un multiple de 11.

Solution de l'exercice 7

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 2^n$ est un multiple de 11, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $13^n - 2^n = 11k$.

Initialisation

Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned}13^n - 2^n &= 13^0 - 2^0 \\&= 1 - 1 \\&= 0\end{aligned}$$

qui est un multiple de 11 car $0 = 11 \times 0$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $13^n - 2^n = 11k$.

On a alors :

$$13^{n+1} - 2^{n+1} = 13 \times 13^n - 2 \times 2^n$$

Or $13^n = 11k + 2^n$ par hypothèse de récurrence, donc :

$$\begin{aligned}13^{n+1} - 2^{n+1} &= 13 \times (11k + 2^n) - 2 \times 2^n \\&= 13 \times 11k + 13 \times 2^n - 2 \times 2^n \\&= 13 \times 11k + 11 \times 2^n \\&= 11 \times (13k + 2^n) \\&= 11k'\end{aligned}$$

avec $k' = 13k + 2^n \in \mathbb{Z}$.

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 2^n$ est un multiple de 11.



Exercice 8

Soit a et n deux entiers relatifs. Démontrer que, si a divise $4n + 7$ et a divise $n - 3$, alors a divise 19.

Solution de l'exercice 8

Comme a divise $4n + 7$ et $n - 3$, a divise aussi toute combinaison linéaire de ces deux entiers. En particulier, a divise :

$$\begin{aligned}1(4n + 7) - 4(n - 3) &= 4n + 7 - 4n + 12 \\&= 19\end{aligned}$$

(Conséquence : $a \in \{-19; -1; 1; 19\}$.)



Exercice 9

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n + 5$ divise $n - 1$.

Solution de l'exercice 9

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2n + 5$ divise $n - 1$.

Alors $2n + 5$ divise aussi

$$(2n + 5) - 2(n - 1) = 2n + 5 - 2n + 2 = 7$$

Or $\mathcal{D}(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$ donc il y a quatre cas à traiter :

- $2n + 5 = -7 \Leftrightarrow 2n = -12 \Leftrightarrow n = -6$
- $2n + 5 = -1 \Leftrightarrow 2n = -6 \Leftrightarrow n = -3$
- $2n + 5 = 1 \Leftrightarrow 2n = -4 \Leftrightarrow n = -2$
- $2n + 5 = 7 \Leftrightarrow 2n = 2 \Leftrightarrow n = 1$

Ainsi, si $2n + 5$ divise $n - 1$, alors $n \in \{-6; -3; -2; 1\}$.

Réciproquement :

- pour $n = -6$, on a : $2n + 5 = -7$ et $n - 1 = -7$ avec -7 divisant -7
- pour $n = -3$, on a : $2n + 5 = -1$ et $n - 1 = -4$ avec -1 divisant -4
- pour $n = -2$, on a : $2n + 5 = 1$ et $n - 1 = -3$ avec 1 divisant -3
- pour $n = 1$, on a : $2n + 5 = 7$ et $n - 1 = 0$ avec 7 divisant 0

donc si $n \in \{-6; -3; -2; 1\}$, alors $2n + 5$ divise $n - 1$.
Finalement, les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n + 5$ divise $n - 1$ sont exactement $-6, -3, -2$ et 1 .

2 Nombres complexes (Manuel libre - Pearltrees)



Exercice 10

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z) \text{ et que } \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$$

Solution de l'exercice 10

Posons $z = x + iy$.

On a alors :

$$\begin{aligned} iz &= i(x + iy) \\ &= -y + ix \end{aligned}$$

Il vient immédiatement que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(iz) &= x = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Re}(iz) &= -y = -\operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$



Exercice 11

Déterminer les racines carrées complexes de -5 et $4 - \sqrt{30}$.

Solution de l'exercice 11

$-5 < 0$ donc les racines carrées complexes de -5 sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

$4 - \sqrt{30} < 0$ donc les racines carrées complexes de $4 - \sqrt{30}$ sont $i\sqrt{\sqrt{30} - 4}$ et $-i\sqrt{\sqrt{30} - 4}$.



Exercice 12

Calculer $(1 + i)^2$.

En déduire $(1 + i)^6$ et $(1 + i)^{10}$.

Solution de l'exercice 12

$$\begin{aligned} (1 + i)^2 &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} (1 + i)^6 &= ((1 + i)^2)^3 \\ &= (2i)^3 \\ &= 8i^3 \\ &= -8i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1 + i)^{10} &= ((1 + i)^2)^5 \\ &= (2i)^5 \\ &= 32i^5 \\ &= 32i \end{aligned}$$



Exercice 13

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{aligned} z_1 &= 3i - (4 - i) \\ z_2 &= -3(2 + 4i - (i + 5)) \\ z_3 &= 3i^2 - 4i + 2(i - 3) \\ z_4 &= 3 - i^3 \\ z_5 &= (-1 + i)(2 - 5i) \\ z_6 &= (4i - 3)^2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 13

$$\begin{aligned} z_1 &= -4 + 2i \\ z_2 &= 9 - 9i \\ z_3 &= -9 - 2i \\ z_4 &= 3 + i \\ z_5 &= 3 + 7i \\ z_6 &= -7 - 24i \end{aligned}$$



Exercice 14

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{aligned} z_1 &= (3 + 5i)(2 - \sqrt{2}i) \\ z_2 &= 5 - (2i - 3)(1 - i) \\ z_3 &= (-1 + i)(2 - 3i)(4 + 2i) \\ z_4 &= (2 - 3i)^3 \\ z_5 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ z_6 &= \left(\frac{5}{3}i + 7\right)(1 - i) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 14

$$\begin{aligned} z_1 &= (6 + 5\sqrt{2}) + (10 - 3\sqrt{2})i \\ z_2 &= 6 - 5i \\ z_3 &= -6 + 22i \\ z_4 &= -46 - 9i \\ z_5 &= i \\ z_6 &= \frac{26}{3} - \frac{16}{3}i \end{aligned}$$



Exercice 15

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$z_1 = \frac{1+i}{3+i}$$

$$z_2 = \frac{3i+2}{4-i}$$

$$z_3 = \frac{1}{i+3}$$

$$z_4 = \frac{i}{i-\sqrt{2}}$$

$$z_5 = \frac{3-\sqrt{2}i}{1-4i}$$

$$z_6 = \frac{(2-i)(3+5i)}{2i-1}$$

Solution de l'exercice 15

$$z_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$z_2 = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

$$z_3 = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

$$z_4 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$z_5 = \left(\frac{3}{17} + \frac{4\sqrt{2}}{17}\right) + \left(\frac{12-\sqrt{2}}{17}\right)i$$

$$z_6 = \frac{3}{5} - \frac{29}{5}i$$



Exercice 16

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 2i + \frac{5}{i}$$

$$z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

Solution de l'exercice 16

$$z_1 = -3i$$

$$z_2 = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$$



Exercice 17

Déterminer les nombres réels x et y tels que :
 $(1+5i)x + (4-3i)y = 3-i$.

Solution de l'exercice 17

$x = \frac{5}{23}$ et $y = \frac{16}{23}$ (par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un nombre complexe, on obtient une équation pour x et une pour y).



Exercice 18

Déterminer les nombres réels x et y tels que :
 $(1+5i)x + (4-3i)y = 3xy$.

Solution de l'exercice 18

$x = \frac{23}{15}$ et $y = \frac{23}{9}$ ou $x = 0$ et $y = 0$.



Exercice 19

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $z^2 - 3i$ en fonction des parties réelle et imaginaire de z .

Solution de l'exercice 19

Soit x et y des réels tels que $z = x + iy$, on a $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

$$\begin{aligned} z^2 - 3i &= (x + iy)^2 - 3i \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 - 3i \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy - 3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2 - 3i) &= \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 \\ \operatorname{Im}(z^2 - 3i) &= 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) - 3 \end{aligned}$$



Exercice 20

Déterminer la forme algébrique du conjugué des nombres suivants.

$$z_1 = -1 + 3i$$

$$z_2 = 3 - 4i$$

$$z_3 = 5i$$

$$z_4 = 7$$

$$z_5 = (4+2i)(7-2i)$$

Solution de l'exercice 20

$$\bar{z}_1 = \overline{-1+3i} = -1-3i$$

$$\bar{z}_2 = \overline{3-4i} = 3+4i$$

$$\bar{z}_3 = \overline{5i} = -5i$$

$$\bar{z}_4 = \overline{7} = 7$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_5 &= \overline{(4+2i)(7-2i)} = \overline{(4+2i)} \times \overline{(7-2i)} \\ &= (4-2i)(7+2i) = 32-6i \end{aligned}$$

Exercice 21

On considère $z_1 = \frac{2-i}{4+3i}$ et $z_2 = \frac{2+i}{4-3i}$.

1. Vérifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel. Que peut-on en déduire pour les parties imaginaires de z_1 et de z_2 ?
2. Vérifier que $z_1 - z_2$ est un nombre imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour les parties réelles de z_1 et de z_2 ?

Solution de l'exercice 21

1. $z_1 + z_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_1} = \overline{z_2 + z_1}$ car z_1 et z_2 sont conjugués l'un de l'autre.

Donc $z_1 + z_2$ est un nombre réel. Ainsi, les parties imaginaires de z_1 et de z_2 sont opposées.

2. $z_1 - z_2 = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_1} = \overline{z_2 - z_1} = -(z_1 - z_2)$ donc $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.

$$\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = \operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2) = 0$$

Ainsi les parties réelles de z_1 et de z_2 sont égales.

Exercice 22

Montrer que les nombres suivants sont soit réels soit imaginaires purs.

$$a = z^2 - (\bar{z})^2$$

$$b = z\bar{z}$$

$$c = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z + \bar{z}} \text{ avec } z + \bar{z} \neq 0$$

Solution de l'exercice 22

$$\bar{a} = \overline{z^2 - (\bar{z})^2} = \bar{z}^2 - \overline{(\bar{z})^2} = (\bar{z})^2 - z^2 = (\bar{z})^2 - z^2 = -a \quad 2.$$

donc a est un imaginaire pur.

$\bar{b} = \overline{z\bar{z}} = \bar{z} \times z = b$ donc b est un nombre réel.

$$\bar{c} = \overline{\left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{z + \bar{z}}\right)} = \frac{\bar{z}^2 + z^2}{\bar{z} + z} = c.$$

Donc c est un nombre réel.

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $4z - 1 = 3i$
2. $-4z - 1 + 2i = 3z - 2$
3. $2i - z^2 = (1 - z)(3 + z)$
4. $-3 + iz = (2 + i)(z - 1)$
5. $-2iz + 3i = 3 + z - 4i$
6. $\frac{z}{i+1} + 3 = \frac{z}{i-1} - 3$

Solution de l'exercice 23

1. $S = \left\{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i\right\}$ (on a « isolé » z).
2. $S = \left\{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}i\right\}$ (on a « isolé » z).
3. $S = \left\{\frac{3}{2} - i\right\}$ (on a simplifié par $-z^2$ puis « isolé » z).
4. $S = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$ (on a simplifié par iz puis « isolé » z).
5. $S = \left\{\frac{11}{5} + \frac{13}{5}i\right\}$
6. $S = \{-6\}$

Exercice 24

Résoudre les systèmes suivants avec z et z' comme inconnues.

1. $\begin{cases} z + z' = 3 + 4i \\ z - z' = 1 - 5i \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3z + 5z' = 12 + i \\ z - z' = -2 + 3i \end{cases}$
3. $\begin{cases} z + 2z' = 3i \\ iz - z' = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2z - 3z' = 1 + 5i \\ z + iz' = 3 + 2i \end{cases}$

Solution de l'exercice 24

1. On procède comme dans $\mathbb{R}^2$ par combinaisons linéaires :

$$z = 2 - \frac{1}{2}i; z' = 1 + \frac{9}{2}i$$

$$z = \frac{1}{4} + 2i; z' = \frac{9}{4} - i$$

3.

$$z = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i; z' = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$$

4.

$$z = 2 + i; z' = 1 - i$$

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z + 5 - i = 3\bar{z} + 2 - 5i$
2. $3\bar{z} + 4z = z - 5i$
3. $z\bar{z} = z + 2$
4. $2z^2 + z\bar{z} = i$
5. $3z + i\bar{z} = 4 - i$
6. $z\bar{z} = 2z + i$

Solution de l'exercice 25

On pose $z = x + iy$. On reporte dans l'équation, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. Voici les résultats :

1. $S = \left\{ \frac{3}{2} - i \right\}$

2. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$3\bar{z} + 4z = z - 5i \Leftrightarrow 3(z + \bar{z}) - 5i \\ \Leftrightarrow z + \bar{z} = -\frac{5}{3}i$$

Or $z + \bar{z}$ est un nombre réel donc l'équation proposée n'a pas de solution.

3. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.

$$z\bar{z} = z + 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x + iy + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + y^2 - iy = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + y^2 = 0 \text{ et } y = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \text{ et } y = 0 \\ \Leftrightarrow (x = -1 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (x = 2 \text{ et } y = 0)$$

Donc : $S = \{-1; 2\}$

4. $S = \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2} \right\}$

5. $S = \left\{ \frac{13}{8} - \frac{7}{8}i \right\}$

6. $S = \left\{ \frac{-\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$



Exercice 26

Préciser l'ensemble de validité de chacune des équations suivante, puis la résoudre.

1. $\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 2 + i$

2. $\frac{z-1}{iz+2} = 3i$

3. $\frac{z}{z-2i} = -1 + i$

4. $\frac{\bar{z}+i}{z-i} = 1 + i$

Solution de l'exercice 26

1. L'équation est définie si $iz + 1 \neq 0$ et si $z - i \neq 0$.

$$iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow z = i \text{ et } z - i \neq 0 \Leftrightarrow z = i$$

Ainsi, l'ensemble de validité de cette équation est $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = -(-i)\frac{z}{(-i)(iz+1)} + \frac{3z}{z-i} \\ = \frac{z}{z-i} + \frac{iz}{z-i} + \frac{3z}{z-i} \\ = \frac{z(3+i)}{z-i}$$

Donc $S = \{1 - 2i\}$.

2. L'équation est définie si $iz + 2 \neq 0$.

$$iz + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{2}{i} \Leftrightarrow z = 2i$$

Ainsi, l'ensemble de validité de cette équation est $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$,

$$\frac{z-1}{iz+2} = 3i \\ \Leftrightarrow z-1 = 3i(iz+2) \\ \Leftrightarrow z-1 = -3z+6i \\ \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i$$

Ainsi, $S = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i \right\}$.

3. L'ensemble de validité de cette équation est $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$S = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i \right\}$$

4. $\bar{z} - i = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = i \Leftrightarrow z = -i$ Ainsi, l'ensemble de validité de cette équation est $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$,

$$\frac{\bar{z}+i}{z-i} = 1 + i \Leftrightarrow \bar{z}+i = (1+i)(z-i) \\ \Leftrightarrow -i\bar{z} = -2i + 1 \\ \Leftrightarrow \bar{z} = 2 + i \\ \Leftrightarrow z = 2 - i$$

Ainsi $S = \{2 - i\}$.



Exercice 27

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = 0 \\ \Leftrightarrow (z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29) = 0$$

2. En utilisant la question précédente, résoudre l'équation

$$z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = 0 \text{ dans } \mathbb{C}$$

Solution de l'exercice 27

1. On développe : $(z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29)$.

2. $S = \{3i; -3i; 5 - 2i; 5 + 2i\}$.



Exercice 28

On considère l'équation (E) :

$$2z^3 + 9z^2 + 7z + 12 = 0$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$2z^3 + 9z^2 + 7z + 12 = (z + 4)(2z^2 + z + 3)$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Solution de l'exercice 28

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z+4)(2z^2+z+3) = 2z^3 + z^2 + 3z + 8z^2 + 4z + 12 \\ = 2z^3 + 9z^2 + 7z + 12$$

$$2. S = \left\{ -4; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i; -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i \right\}$$



Exercice 29

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$1. \frac{1}{z} + 4z = 0$$

$$2. \frac{z-3}{z-2} = z$$

Solution de l'exercice 29

$$1. S = \left\{ \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2}i \right\}$$

$$2. S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$



Exercice 30

Préciser l'ensemble de définition des équations suivantes, puis les résoudre.

$$1. \frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 2+i$$

$$2. \frac{z-1}{iz+2} = 3i$$

$$3. \frac{z}{z-2i} = -1+i$$

$$4. \frac{\bar{z}+i}{z-i} = 1+i$$

Solution de l'exercice 30

1. L'équation est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $iz+1 \neq 0$ et $z-i \neq 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $iz+1=0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow z = i$ et $z-i=0 \Leftrightarrow z=i$.

Donc l'équation est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$-\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = -(-i) \frac{z}{(-i)(iz+1)} + \frac{3z}{z-i} \\ = \frac{z}{z-i} + \frac{iz}{z-i} + \frac{3z}{z-i} \\ = \frac{z(3+i)}{z-i}$$

Donc

$$-\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 2+i \Leftrightarrow \frac{z(3+i)}{z-i} = 2+i \\ \Leftrightarrow z(3+i) = (2+i)(z-i) \\ \Leftrightarrow z = 1-2i$$

Donc $S = \{1-2i\}$

2. L'équation est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $iz+2 \neq 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $iz+2=0 \Leftrightarrow z = -\frac{2}{i} \Leftrightarrow z = 2i$.

Donc l'équation est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$,

$$\frac{z-1}{iz+2} = 3i \Leftrightarrow z-1 = 3i(iz+2) \\ \Leftrightarrow z-1 = -3z+6i \\ \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i$$

$$S = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i \right\}$$

3. L'équation est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$S = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i \right\}$$

4. L'équation est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z-i \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z-i=0 \Leftrightarrow z=i$.

Donc l'équation est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$,

$$\frac{\bar{z}+i}{z-i} = 1+i \Leftrightarrow \bar{z}+i = (1+i)(z-i) \\ \Leftrightarrow -i\bar{z} = -2i+1 \\ \Leftrightarrow \bar{z} = 2+i \\ \Leftrightarrow z = 2-i$$

Donc, $S = \{2-i\}$.



Exercice 31

1 Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-16+30i$.

Solution de l'exercice 31

Posons $z = -16+30i$. Le but de l'exercice est de déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $(x+iy)^2 = a+ib$. Il vient

$$x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i \times (2xy)$$

On identifie les coefficients aux valeurs entre parenthèses, et on obtient le système :

$$\begin{cases} -16 = x^2 - y^2 \\ 30 = 2xy \end{cases}$$

On peut rajouter une troisième équation à ce système (cf le cours). D'où le système

$$\begin{cases} -16 = x^2 - y^2 & (1) \\ 34 = x^2 + y^2 & (2) \\ 30 = 2xy & (3) \end{cases}$$

- (1) + (2) donne $2x^2 = 18$, i.e. $x^2 = 9$
- (1) - (2) donne $2y^2 = 50$, i.e. $y^2 = 25$
- (3) nous permet d'affirmer que $xy = 15$, i.e. que x et y sont de même signe.

Ainsi on a deux couples (x, y) qui conviennent : $(3, 5)$ et $(-3, -5)$

On en conclut que les racines carrées de $z = -16+30i$ sont $z_1 = 3+5i$ et $z_2 = -3-5i$

II Suites

Ex 18 ☆☆

Dans chacun des cas ci-dessous, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

- 1) Sachant que $u_0 = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{7}{6}$, calculer u_{10} et u_{20} .
- 2) Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$, calculer u_2 et u_5 .
- 3) Sachant que $u_5 = 7$ et $u_{10} = -3$, calculer u_0 et u_1 .
- 4) Sachant que $u_{15} = 3$ et $u_{80} = \frac{139}{3}$, calculer u_0 et S_{80} .
- 5) Sachant que $u_0 = -7$. Déterminer r ainsi que l'entier naturel p de telle sorte que l'on ait $u_p = 83$ et $S_{p-1} = 2691$.

Ex 19 ☆☆

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

- 1) Sachant que $q = \frac{1}{3}$ et que $u_0 = 7$, calculer u_1 , u_2 , u_3 .
- 2) Sachant que $u_0 = 12$ et $u_2 = 3$, calculer u_1 et u_5 .
- 3) Sachant que $u_0 = -\frac{3}{8}$, déterminer q ainsi que l'entier naturel p de telle sorte que l'on ait $u_p = -48$ et $S_p = \frac{-765}{8}$.

Ex 20 ☆☆

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

On pose : $v_n = e^{u_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

Ex 21 ☆☆

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
- 2) Soit a un réel et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n entier naturel. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit géométrique. Donner alors ses éléments caractéristiques.
- 3) Dans la suite de l'exercice, on pose $v_n = u_n - 5$. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
- 4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 5) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 6) Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ?
- 7) Déterminer la limite de la suite (T_n) .
- 8) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et la limite de la suite (S_n) .

Ex 22 ☆☆

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \text{ et } v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

- 1) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $w_n = v_n - u_n$.
 - a) Démontrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie est une suite géométrique puis exprimer w_n en fonction de n .
 - b) En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

- 2) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $x_n = 8v_n + 3u_n$. Démontrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est constante.
- 3) En déduire les expressions respectives de u_n et v_n en fonction de n .
- 4) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ convergent vers une même limite que l'on explicitera.

Ex 23 ☆☆

(u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- 1) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Expliquer alors pourquoi les termes v_n sont définis pour tout n .
- 2) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 puis v_1 , v_2 , v_3 , v_4 .
- 3) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- 4) Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, exprimer :
 - a) v_n en fonction de n ;
 - b) u_n en fonction de n .

Ex 24 ☆☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
- 2) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite. (on utilisera la méthode de représentation graphique des suites définies par une formule de récurrence). Quelle conjecture peut-on faire?
- 3) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
- 4) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison.
- 5) En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 6) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \neq 0$.
- 7) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de v_n .
- 8) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et sa limite éventuelle.

Ex 25 ☆☆

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

- 1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - d) Exprimer v_n en fonction de n .

3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a) Calculer w_0 .

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n .

4) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

6) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 - \frac{5}{1,5^n} \leq 2 - \frac{2n+3}{2^n} \leq 2 - \frac{3}{2^n}.$$

En déduire la limite de la suite (S_n) .

Ex 26 ☆☆☆

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1) Étudier la monotonie de la suite u .

2) a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variation de la fonction h .

En déduire que pour tout $x \in]-1; 0[$, $h(x) \in]-1; 0[$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$.

3) Étudier la convergence de la suite u . Déterminer, si elle existe, sa limite.

Ex 27 ☆☆☆

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

b) Quelle est la limite de (u_n) ?

2) La suite (v_n) est définie par $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$.

Quelle est la limite de (v_n) ?

Ex 28 ☆☆☆

Soient deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$; $a_0 = 450$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 , d_2 , a_1 et a_2 .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = d_n - 200$.

Démontrer que la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

4) a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a :

$$2^n \geq n^2.$$

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$$0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}.$$

5) Étudier la convergence de la suite (a_n) .

II Suites

Ex 18

- $u_{10} = u_0 + 10r = \frac{79}{6}$ et $u_{20} = u_0 + 20r = \frac{149}{6}$;
- $r = u_1 - u_0 = 3$ donc $u_2 = u_1 + r = 8$ et $u_5 = u_0 + 5r = 17$.
- $5r = -10$ donc $r = -2$. Ainsi $u_0 = 17$ et $u_1 = 15$;
- $3 = u_0 + 15r$ et $\frac{139}{3} = u_0 + 80r$ donc $r = \frac{2}{3}$ et $u_0 = -7$.
On a donc $S_{80} = 81 \frac{\frac{139}{3} + (-7)}{2} = 1593$.
- $u_0 + pr = 83$ et $u_0 = -7$ donc $pr = 90$.
De plus, $S_{p-1} = p \frac{u_0 + u_{p-1}}{2} = 2691$.
Soit $p \frac{u_0 + u_0 + (p-1)r}{2} = 2691$.
Soit $-7p + 45p - 45 = 2691 \Leftrightarrow 38p = 2736$ donc $p = 72$
et $r = \frac{5}{4}$.

Ex 19

- $u_1 = \frac{7}{3}, u_2 = \frac{7}{9}$ et $u_3 = \frac{7}{27}$.
- $q^2 = \frac{1}{4}$.
Soit $q = \frac{1}{2}$, alors $u_1 = 6$ et $u_5 = \frac{3}{8}$, soit $q = -\frac{1}{2}$, alors $u_1 = -6$ et $u_5 = -\frac{3}{8}$.
- On a $u_p = u_0 \times q^p$ donc $-48 = -\frac{3}{8} \times q^p$ soit $q^p = \frac{48 \times 8}{3} = 128$.
D'autre part, on a $S_p = u_0 \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}$ soit $\frac{-765}{8} = -\frac{3}{8} \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}$ et donc $255 = \frac{1 - 128q}{1 - q}$ ce qui donne $127q - 254 = 0$ soit $q = 2$. On a enfin $p = 7$.

Ex 20

On a $u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times e^r = (e^r) v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison e^r .

Ex 21

- $u_1 = \frac{13}{5}, u_2 = \frac{89}{25}, u_3 = \frac{517}{125}$.
- Soit a un réel et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n entier naturel.
 $v_{n+1} = u_{n+1} + a$
 $v_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 + a$
 $v_{n+1} = \frac{3}{5}(u_n + a) - \frac{3}{5}a + 2 + a$
 $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + \frac{2}{5}a + 2$
 (v_n) est géométrique $\Leftrightarrow \frac{2}{5}a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -5$ On a alors pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $3/5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -4$
- D'après les résultats sur les suites géométriques $v_n = -4 \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
- Comme $v_n = u_n - 5$ on a $u_n = -4 \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5$.

- Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.

- T_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique. D'après les résultats du cours comme $\frac{3}{5} \neq 1$ on a : $T_n = -4 \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} = -4 \times \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$
Donc $T_n = -10 \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$
- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -10$.
- Comme $u_n = v_n + 5$ pour tout entier naturel n , $S_n = T_n + 5(n+1)$ car il y a $n+1$ termes.
Donc $S_n = -10 \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) + 5(n+1)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -10$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5(n+1) = +\infty$, donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Ex 22

- a) Pour tout entier naturel non nul n ,
 $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$
 $w_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n$.
Donc $(w_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = -11$.
Donc pour tout $n \geq 1$, $w_n = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.
- b) Comme $\left|\frac{1}{12}\right| < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.
- Pour tout entier naturel non nul n ,
 $x_{n+1} = 8v_{n+1} + 3u_{n+1} = 8 \frac{u_n + 3v_n}{4} + 3 \frac{u_n + 2v_n}{3} = 3u_n + 8v_n = x_n$.
Donc $(x_n)_{n \geq 1}$ est constante et $x_1 = 8 + 36 = 44$.
- Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 8v_n + 3u_n = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{3}{11}w_n + 4 \\ u_n = -\frac{8}{11}w_n + 4 \end{cases}$$

On en déduit

$$u_n = 8 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 4 \text{ et } v_n = -3 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 4.$$

- $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ convergent vers 4.

Ex 23

- Soit la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n > 0$.
Démontrons cette propriété par récurrence :
 - Initialisation** : on a $u_0 = 2 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} > 0$ car $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $u_n + 1 > 1 > 0$ d'après la même hypothèse.
 $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Puisque $u_n > 0$, $v_n = \frac{1}{u_n}$ est défini puisqu'on calcule l'inverse d'un nombre non nul.

$$2) \text{ On a : } u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 1} = \frac{2}{3}; u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}; u_3 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{7} \text{ et } u_4 = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Alors : } v_1 = \frac{3}{2}; v_2 = \frac{5}{2}; v_3 = \frac{7}{2}; v_4 = \frac{9}{2}.$$

3) Montrons que (v_n) est arithmétique :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 1}} = \frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + v_n = v_n + 1 \text{ donc } v_{n+1} = v_n + 1.$$

(v_n) est donc arithmétique, de raison $r = 1$.

4) a) Puisque (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$,

$$v_n = v_0 + 1 \times n \text{ avec } v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2} \text{ d'où } v_n = \frac{1}{2} + n = \frac{2n + 1}{2}.$$

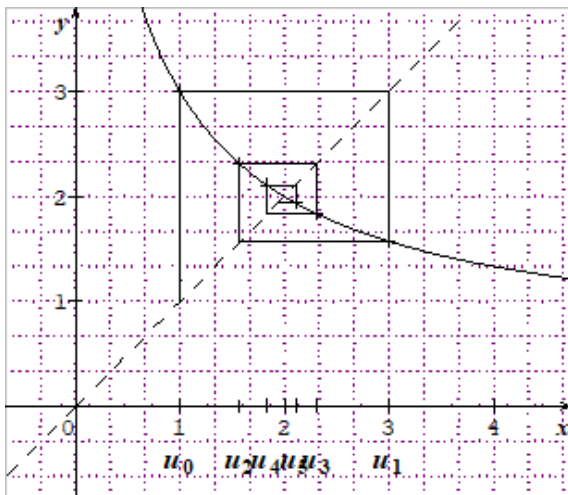
$$b) v_n = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} \text{ donc, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2}{2n + 1}$$

On peut vérifier que l'on retrouve bien les premiers termes calculés à la première question.

Ex 24

$$1) u_1 = 3, u_2 = \frac{11}{7}, u_3 = \frac{67}{29}$$

2) On obtient le graphique :



On peut conjecturer que la suite converge vers 2.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 = 1$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \geq 0$ (HR)

On a $u_k + 8 > 0$ et $2u_k + 1 > 0$

$$\text{Donc } u_{k+1} = \frac{u_k + 8}{2u_k + 1} > 0$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

4) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \frac{u_n + 8 - 2(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{u_n + 8 + 2(2u_n + 1)} = \frac{u_n + 8 - 4u_n - 2}{u_n + 8 + 4u_n + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} = \frac{-3(u_n - 2)}{5(u_n + 2)} = -\frac{3}{5}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.

$$5) \text{ On a pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n.$$

6) $v_0 \neq 1$ et pour tout $n > 0$, $v_n = \frac{(-3)^{n-1}}{5^n}$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux cette fraction est irréductible donc $v_n \neq 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \neq 0$. On peut également remarquer que $|v_n| \leq \frac{1}{3} < 1$ ce qui permet de conclure également.

$$7) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \Leftrightarrow (u_n + 2)v_n = u_n - 2 \text{ et } u_n \neq -2 \text{ (toujours vrai car } u_n \geq 0) \Leftrightarrow u_n v_n + 2v_n = u_n - 2$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 2$$

$$\Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = -2(v_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2(v_n + 1)}{v_n - 1} \text{ car } v_n - 1 \neq 0$$

$$8) \text{ On a donc } u_n = \frac{\frac{2}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n - 2}{-\frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n - 1}$$

$-1 < -\frac{3}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Ex 25

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

$$1) \text{ D'après la définition, } u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

• Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$;

$$\text{or, } u_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \neq u_2.$$

• Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$;

$$\text{or, } u_1 + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \neq u_2.$$

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

$$a) v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = (u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n) - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = \frac{1}{2}v_n.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

d) Par conséquent, on a

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

$$3) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N} : w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

$$a) w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2(v_n + \frac{1}{2}u_n)}{v_n} =$$

$$\frac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}.$$

c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit : $w_{n+1} = 2 + w_n$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2 + w_n$ signifie que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = -1$ et de raison $r = 2$.

Par conséquent,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n \times r = -1 + 2n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a trouvé que $w_n = 2n - 1$.

D'autre part, $w_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

Donc $2n - 1 = 2^n \times u_n$, soit $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$ (car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$).

5) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}.$$

• Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$.

La formule est vraie au rang $n = 0$.

• Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$S_k = \sum_{i=0}^k u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_k = 2 - \frac{2k + 3}{2^k} \quad (\text{HR}).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } S_{k+1} &= S_k + u_{k+1} \\ &= \left(2 - \frac{2k + 3}{2^k}\right) + \frac{2(k+1) - 1}{2^{k+1}} \quad (\text{HR}) \\ &= 2 + \frac{-2(2k + 3) + 2k + 1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-2k - 5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2k + 5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2(k+1) + 3}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

La formule est héréditaire.

• Conclusion : On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

6) • Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - \frac{2n + 3}{2^n} \leq 2 - \frac{3}{2^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 3 \geq 3$, d'où $\frac{2n + 3}{2^n} \geq \frac{3}{2^n}$, et par suite $-\frac{2n + 3}{2^n} \leq -\frac{3}{2^n}$. Enfin, $2 - \frac{2n + 3}{2^n} \leq 2 - \frac{3}{2^n}$.

• Montrons que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 2 - \frac{5}{1,5^n} \leq 2 - \frac{2n + 3}{2^n}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2 - \frac{5}{1,5^n} \leq 2 - \frac{2n + 3}{2^n} &\iff -\frac{5}{1,5^n} \leq -\frac{2n + 3}{2^n} \\ &\iff \frac{5}{1,5^n} \geq \frac{2n + 3}{2^n} \\ &\iff \frac{2^n}{1,5^n} \geq \frac{2n + 3}{5} \\ &\iff \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{2n + 3}{5} \end{aligned}$$

Démontrons par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{2n + 3}{5}.$$

– Initialisation : $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$ et $\frac{2 \times 0 + 3}{5} = \frac{3}{5}$; or $1 \geq \frac{3}{5}$.
 $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}\right.$ et $\frac{2 \times 1 + 3}{5} = 1$; or $\frac{4}{3} \geq 1$).

L'inégalité est vraie au rang $n = 0$ (et au rang $n = 1$).

– Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on suppose que

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k \geq \frac{2k + 3}{5}. \quad (\text{HR}).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^k \\ &\geq \frac{4}{3} \times \frac{2k + 3}{5} \quad (\text{HR}) \\ &\geq \frac{8k + 12}{15} \geq \frac{6k + 15}{15} \quad (\text{car } k \geq 2) \\ \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &\geq \frac{2k + 5}{5} = \frac{2(k+1) + 3}{5} \end{aligned}$$

L'inégalité est héréditaire.

– Conclusion : On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{2n + 3}{5} \quad \text{i.e.} \quad 2 - \frac{5}{1,5^n} \leq 2 - \frac{2n + 3}{2^n}.$$

• Comme $1,5 > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,5^n = +\infty$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{5}{1,5^n} = 2.$$

• Comme $2 > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{2^n} = 2.$$

Alors, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$

Ex 26

1) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$: la suite est donc croissante.

2) a) $h(x) = x^2 + x$; h est dérivable et $h'(x) = 2x + 1$.

Sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ est décroissante;

Sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ est croissante.

$h'(-\frac{1}{2}) = 0$. La fonction admet en ce point un extremum qui est un minimum $h(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

Sur $]-1; -\frac{1}{2}[$ la fonction décroît de 0 à $-\frac{1}{4}$ et sur $]-\frac{1}{2}; 0[$, la fonction croît de $-\frac{1}{4}$ à 0.

Conclusion :

si $x \in]-1; 0[$, alors $-1 < -\frac{1}{4} \leq h(x) < 0$.

b) Par récurrence :

• Initialisation $-1 < a = u_0 < 0$.

• Hérédité : supposons que pour l'entier naturel k , $-1 < u_k < 0$.

D'après la question précédente :

si $u_k \in]-1; 0[$, alors $u_{k+1} = h(u_k)$ appartient elle aussi à cet intervalle

Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout naturel n , $-1 < u_n < 0$.

3) La suite u est croissante et majorée par 0 : elle est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\ell \leq 0$.

Or la fonction h , dérivable est continue : la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ donne à la limite

$$\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Ex 27

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) } u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}][\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

car $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Pour tout n , $n < n+1$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ (croissance

de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

On en déduit :

$\sqrt{n} + \sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$, c'est-à-dire $2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n+1}$.

En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 2) Pour tout n , $u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $= [\sqrt{2} - \sqrt{1}] + [\sqrt{3} - \sqrt{2}] + \dots$
 $+ [\sqrt{n} - \sqrt{n-1}] + [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = \sqrt{n+1} - 1$, après simplification.

On en déduit que, pour tout $n > 0$,

$$v_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{On a } v_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$

Ex 28

1) $d_1 = 250$ $a_1 = 445$ $d_2 = 225$ $a_2 = \frac{835}{2}$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d_{n+1} - 200 \\ &= \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 \\ &= \frac{1}{2}d_n - 100 \\ &= \frac{1}{2}(d_n - 200) \\ &= \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

On en déduit que (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n = 100 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ et } d_n = 100 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 200.$$

Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$:

« $a_n = 100n \left(\frac{1}{2} \right)^n + 110 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 340$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$:

$$100 \times 0 \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 110 \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 340 = 450 = a_0 \text{ donc } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \\ &= \frac{1}{2} \left(100 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 200 \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(100n \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 110 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 340 \right) + 70 \\ &= 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 100 + 100n \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \\ &\quad 110 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 170 + 70 \\ &= 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} (n+1) + 110 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 340 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- On conclut par le principe de récurrence.

- 4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} 2n^2 - (n+1)^2 &= 2n^2 - n^2 - 2n - 1 \\ &= n^2 - 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Mais $n \geq 3$ donc $n-1 \geq 2$ et $(n-1)^2 \geq 4$, donc $(n+1)^2 - 2 \geq 2 > 0$ ce qui permet de conclure.

- b) Démontrons par récurrence sur $n \geq 4$ la proposition $\mathcal{Q}_n$: « $2^n \geq n^2$ ».

- Initialisation : pour $n = 4$, on a $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $\mathcal{Q}_4$ est vraie.

- Hérédité : On suppose que $\mathcal{Q}_n$ est vraie, pour un entier $n \geq 4$.

On a donc $2^n \geq n^2$ ce qui entraîne, en multipliant par 2, que $2^{n+1} \geq 2n^2$.

Mais, puisque $n \geq 4$, on a $n \geq 3$ donc, d'après la question précédente, $2n^2 > (n+1)^2$. On peut combiner les inégalités de même sens et donc on a $2^{n+1} > (n+1)^2$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : ...

- c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. D'après la question précédente, on a $2^n \geq n^2 > 0$ donc, en passant à l'inverse,

$$0 < \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \frac{1}{n^2}.$$

En multipliant par $100n$ qui est positif, on a bien $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \frac{100}{n}$.

- 5) Comme d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{100}{n} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 100n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 110 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

Par somme, la suite (a_n) est convergente, de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 340$.



4 Matrices (Manuel libre - Pearltrees)

Exercice 32

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse.
 n est un entier naturel.

Proposition : si $\exists n \geq 2, A^n = 0$, alors $A = 0$.

Solution de l'exercice 32

Cette proposition est fausse. On considère le contre-exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 = 0$.

Exercice 33

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que l'on peut calculer AC et BC et effectuer ces produits.
2. Calculer $AC + BC$.
3. Calculer $D = A + B$.
4. Justifier que l'on peut calculer DC et effectuer ce produit.
5. Comparer DC avec $AC + BC$.

Solution de l'exercice 33

1. A a deux colonnes et C a deux lignes, donc on peut calculer AC .

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B a deux colonnes et C a deux lignes, donc on peut calculer BC .

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.

$$D = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

4. D a deux colonnes et C a deux lignes, donc on peut calculer DC .

$$DC = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

5. On a donc $DC = AC + BC$, c'est-à-dire

$$(A + B)C = AC + BC$$

qui illustre la distributivité à droite.

Exercice 34

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que l'on peut calculer AB et AC et effectuer ces produits.
2. Calculer $AB + AC$.
3. Calculer $D = B + C$.
4. Justifier que l'on peut calculer AD et effectuer ce produit.
5. Comparer AD avec $AB + AC$.

Solution de l'exercice 34

1. A a deux colonnes et B a deux lignes, donc on peut calculer AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 35 & 11 \\ 28 & 10 \end{pmatrix}$$

A a deux colonnes et C a deux lignes, donc on peut calculer AC .

$$AC = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

2.

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 26 & 20 \end{pmatrix}$$

3.

$$D = B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4. A a deux colonnes et D a deux lignes, donc on peut calculer AD .

$$AD = \begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 26 & 20 \end{pmatrix}$$

5. On a donc $AD = AB + AC$, c'est-à-dire

$$A(B + C) = AB + AC$$

qui illustre la distributivité à gauche.

Exercice 35

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA . Ces deux produits sont-ils égaux ?

2. Calculer A^2 et B^2 .

3. Première identité remarquable

(a) Calculer $C = A + B$ puis C^2 .

(b) Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.

(c) A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

4. Deuxième identité remarquable

(a) Calculer $D = A - B$ puis D^2 .

(b) Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

(c) A-t-on $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$?

5. Troisième identité remarquable

(a) Calculer DC .

(b) Calculer $A^2 - B^2$.

(c) A-t-on $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

Solution de l'exercice 35

1.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } AB \neq BA.$$

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Première identité remarquable

(a)

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C^2 = (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

(c) On n'a pas la première identité remarquable.

4. Deuxième identité remarquable

(a)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D^2 = (A - B)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) On n'a pas la deuxième identité remarquable.

5. Troisième identité remarquable

(a)

$$DC = (A - B)(A + B) = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) On n'a pas la troisième identité remarquable.

Exercice 36

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les déterminants de A et B .

2. Justifier que A et B sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1} .

3. La matrice $C = AB$ est-elle inversible ? Si oui, exprimer C^{-1} en fonction de A^{-1} et B^{-1} .

4. Soit D la matrice égale à $A + B$. D est-elle inversible ?

Solution de l'exercice 36

1.

$$\det(A) = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$$

$$\det(B) = 5 \times 2 - 1 \times 8 = 2$$

2. $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible

$$\text{et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(B) \neq 0$ donc B est inversible

$$\text{et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -4 & 2,5 \end{pmatrix}$$

3. C est inversible et $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. $D = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
car $\det(D) = 6 \times 5 - 3 \times 10 = 0$.

Exercice 37

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice

$$\text{identité } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 puis $2A^2 - 4A + 5I$.

2. Calculer A^3 . Que remarque-t-on ?

3. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse.

Solution de l'exercice 37

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } 2A^2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -4 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De plus, } -4A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } 2A^2 - 4A + 5I = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Pour calculer A^3 , on calcule

$$A^2 \times A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

On remarque donc que $2A^2 - 4A + 5I = A^3$.

3. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{1}{5}(A^3 - 2A^2 + 4A) = I$$

En factorisant par A dans le premier membre, on a

$$\frac{1}{5}(A^2 - 2A + 4I)A = I$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 - 2A + 4I)$.

Solution de l'exercice 38

Partie A

$$1. M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. La vérification est immédiate.

3. On a donc $M^3 - M^2 - 8M = 6I_3$. D'où

$$M(M^2 - M - 8I_3) = 6I_3$$

On en déduit directement que M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3)$.

Partie B

1. A appartient à la parabole, donc $a + b + c = 1$.
 B appartient à la parabole donc $a - b + c = -1$.
 C appartient à la parabole donc $4a + 2b + c = 5$.
On obtient un système qui peut s'écrire sous forme

$$\text{matricielle } M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. On résout ce système

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d'après la partie A.

$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3)$ donne

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On a donc : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

Ce sont bien des entiers.

Exercice 38

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Calculer les matrices M^2 et M^3 .
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I_3$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3)$.

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(2; 5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les nombres a , b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Exercice 39

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Chaque jour, il retrouve d'autres joueurs dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le deuxième, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x -ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a , b et c .

2. Donner une écriture matricielle de ce système sous la forme $AX = B$ avec X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit MA . Que représente la matrice M pour la matrice A ?

4. À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer les valeurs des nombres a , b et c .

5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2500 personnes. Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours? Justifier la réponse.

Solution de l'exercice 39

1. Premier jour : $a + b + c = 8$.

Deuxième jour : $4a + 2b + c = 25$.

Troisième jour : $9a + 3b + c = 80$.

(a, b, c) est donc solution du système

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ 4a + 2b + c = 25 \\ 9a + 3b + c = 80 \end{cases}$$

2. Ce système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$.

3. $MA = I_3$

M est l'inverse de A .

4. On a donc $X = MB$, ce qui permet de déterminer $a = 19$, $b = -40$ et $c = 29$.

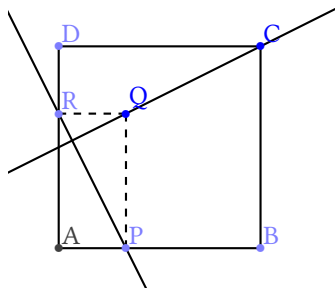
5. Pour répondre à cette question, on peut étudier la fonction polynôme du second degré $f(x) = 19x^2 - 40x + 29$ sur $[1; 10]$ ou plus simplement, puisque seules les valeurs entières de x nous intéressent, faire un tableau de valeurs sur la calculatrice.

5 Produit scalaire et repérage (Lycée Henri IV)

V Repérage

Ex 50

Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :
 P et Q sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré et $AP = DR$



1) Méthode géométrique.

- Montrer que $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = -AR \times DR$ puis que $\vec{CQ} \cdot \vec{AP} = -AP \times BP$
 En déduire que $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = \vec{CQ} \cdot \vec{AP}$
- En déduire que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

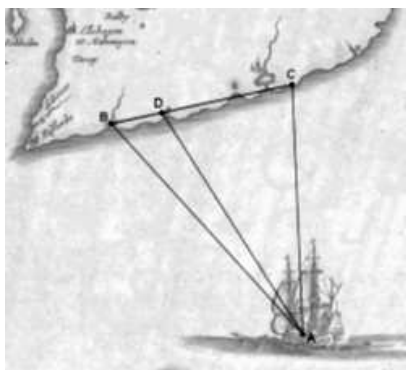
2) Méthode analytique.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

- Si P a pour coordonnées $(a; 0)$, déterminer les coordonnées de R et de Q .
- Déterminer les coordonnées de $\vec{PR}$ et de $\vec{QC}$
- En déduire que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Ex 51

Un navire A se trouve au large de deux villes B et C séparées de 5 km.

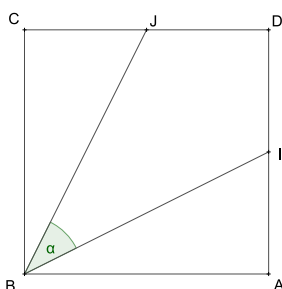


L'angle $\widehat{ABC}$ est de 60° et l'angle $\widehat{BCA}$ est de 80° .

- Déterminer les longueurs AC et AB .
- La ville D se trouve à 1,5 km de la ville B . Calculer la distance qui sépare cette ville du bateau.

Ex 52

Soient $ABCD$ un carré de côté a , I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DC]$. On note α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IBJ}$.



1) Montrer que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha)$.

2) Exprimer les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

3) En déduire une autre manière de calculer $\vec{BI} \cdot \vec{BJ}$ et déterminer α au degré près.

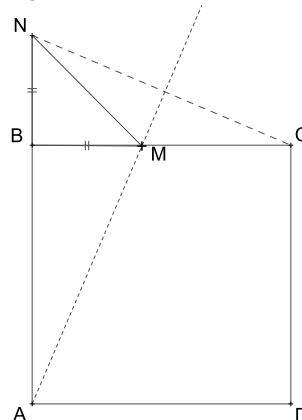
Ex 53

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on donne les points $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$. Faire une figure que vous complèterez au fur et à mesure (unités : 2cm).

- Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ au triangle OBC . Déterminez le rayon de $(\mathcal{C})$.
- Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de OBC .
- Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de OBC .
 Remarque : G est le point tel que $\vec{GO} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
- Montrer que Ω, H et G sont alignés. Déterminez la valeur du réel k tel que $\vec{\Omega H} = k\vec{\Omega G}$;
- Montrer alors que $\vec{\Omega H} = \vec{\Omega O} + \vec{\Omega B} + \vec{\Omega C}$.
- Déterminer les coordonnées de H' , symétrique de H par rapport à la droite (OB) . Montrez que H' est sur $(\mathcal{C})$.

Ex 54

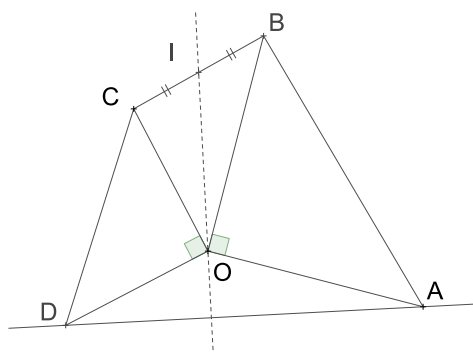
$ABCD$ est un carré et M un point quelconque de $[BC]$.
 BMN est un triangle isocèle en B , extérieur au carré $ABCD$.



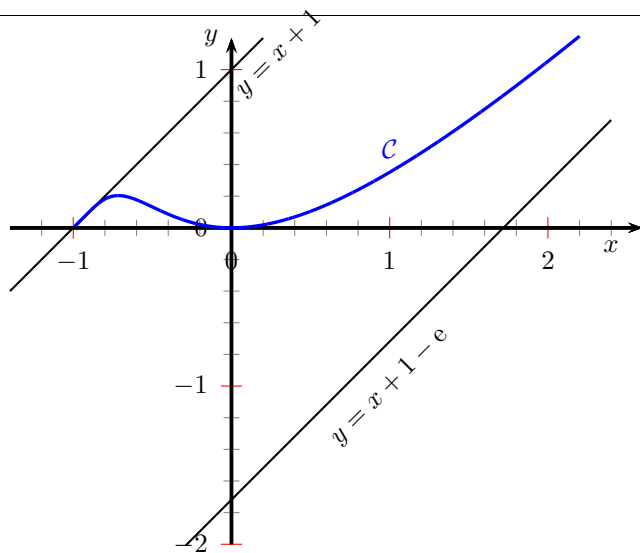
Démontrer que les droites (AM) et (NC) sont perpendiculaires.

Ex 55

Les triangles OAB et OCD sont rectangles isocèles en O , de sens direct. I est le milieu de $[BC]$.



Montrer que la médiane issue de O dans OBC est la hauteur issue de O dans OAD .



Ex 49

Partie A : étude de fonction

- 1) Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or (croissances comparées)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \text{ donc, par opérations sur les limites } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$.

- 2) On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 3) Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

- 4) Pour tout réel x , $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

- 1) La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1.$$

- 2) Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0;0) \in T_a &\Leftrightarrow 0 = (a+1)e^{a-1}(-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = e^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - a^2e^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

- 3) • 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

- Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$

$x > 0$, donc $x+2 > 0$ et par ailleurs $e^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On sait que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en 1.

Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.

Conclusion : sur $]0; +\infty[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- 4) La tangente cherchée est T_1 , elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire

$$y = 2x$$



V Repérage

Ex 50

- 1) Méthode géométrique.

- a) R est le projeté orthogonal de Q sur (AD) et D est le projeté orthogonal de C sur (AD) Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = \vec{DR} \cdot \vec{AR} = -AR \times DR$ (car les vecteurs $\vec{DR}$ et $\vec{AR}$ sont colinéaires de sens contraire)

P est le projeté orthogonal de Q sur (AB) et B est le projeté orthogonal de C sur (AB) Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AP} = \vec{BP} \cdot \vec{AP} = -AP \times BP$ (car les vecteurs $\vec{AP}$ et $\vec{BP}$ sont colinéaires de sens contraire)

Or $AP = DR$ et $AR = BP$ donc les deux produits scalaires sont égaux.

- b) $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = \vec{CQ} \cdot \vec{AP}$ donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} - \vec{CQ} \cdot \vec{AP} = 0$

$$\text{soit } \vec{CQ} \cdot (\vec{AR} - \vec{AP}) = 0$$

Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{PR} = 0$ ce qui prouve que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

- 2) Méthode analytique. On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

- a) Si P a pour coordonnées $(a; 0)$, $R(0, 1-a)$ et de $Q(a, 1-a)$.

b) $\vec{PR} = \begin{pmatrix} -a \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\vec{QC} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$

- c) $\vec{QC} \cdot \vec{PR} = -a(1-a) + (1-a)a = 0$. Les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Ex 51

- 1) Dans le triangle ABC , $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Donc $\hat{A} = 180 - (60 + 80) = 40^\circ$. De plus, la formule des sinus donne : $\frac{BC}{\sin(\hat{A})} = \frac{AC}{\sin(\hat{B})} = \frac{AB}{\sin(\hat{C})}$.

$$\text{Donc } \frac{5}{\sin(40)} = \frac{AC}{\sin(60)} = \frac{AB}{\sin(80)}.$$

$$AC = \frac{5 \sin(60)}{\sin(40)} \simeq 6,7 \text{ km.}$$

$$AB = \frac{5 \sin(80)}{\sin(40)} \simeq 7,7 \text{ km.}$$

2) Dans le triangle ABD d'après la formule d'Al Kashi :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos(\hat{ABD}).$$

$$AD^2 = \left(\frac{5 \sin(80)}{\sin(40)}\right)^2 + 1,5^2 - 2 \left(\frac{5 \sin(80)}{\sin(40)}\right) \times 1,5 \cos(60)$$

$$AD^2 \simeq 49,44 \text{ et donc } AD \simeq 7,0 \text{ km.}$$

Ex 52

1) Dans le triangle IAB rectangle en A D'après le théorème de Pythagore : $BI^2 = IA^2 + AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$

$$\text{Donc } BI = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \text{ car } BI \geq 0$$

De même, dans le triangle JCB rectangle en C , d'après le théorème de Pythagore :

$$BJ^2 = JC^2 + CB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2. \text{ Donc } BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\text{On a } \vec{BI} \cdot \vec{BJ} = BI \cdot BJ \cos(\alpha) = \frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha)$$

$$\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 \cos(\alpha)$$

2) $\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI}$ (relation de Chasles)

$$\vec{BI} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$\vec{BJ} = \vec{BC} + \vec{CJ} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\vec{BJ} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$$

$$\vec{BJ} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB} \text{ car } ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

3) $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = (-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}) \cdot (\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB})$

$$\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = -\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}\vec{AD} \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 \text{ car } \vec{AB} \text{ et } \vec{AD} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \text{ et donc } \vec{BI} \cdot \vec{BJ} = a^2. \text{ On en déduit que } \frac{5}{4}a^2 \cos(\alpha) = a^2$$

$$\text{Donc } \cos(\alpha) = \frac{4}{5}$$

α est un angle géométrique donc sa mesure est positive.

La calculatrice nous donne : $\alpha \simeq 37^\circ$

Ex 53

1) Médiatrice de $[OB]$: $x = 3$;

Médiatrice de $[OC]$: le milieu est $I(1; 2)$, on a une équation en faisant le p.s. : $\vec{IM} \cdot \vec{OC} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$$2x + 4y - 10 = 0.$$

Le point d'intersection est $\Omega(3; 1)$.

Le rayon du cercle est $r = \sqrt{10}$.

2) Idem pour H ; hauteur issue de C : $x = 2$, hauteur issue de B : $x + 2y - 6 = 0$, H a pour coordonnées $(2; 2)$.

$$3) \text{ Pour } G \text{ on fait : } \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-x \\ 4-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit } G \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3} \right)$$

4) On calcule $\vec{\Omega H} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; on vérifie facilement que $\vec{\Omega H} = 3\vec{\Omega G}$ donc les points sont alignés.

5) Faire le calcul.

6) Le symétrique de H est $H'(2; -2)$; il appartient au cercle car $\Omega H' = \sqrt{10}$.

Ex 54

1ère méthode :

$$\begin{aligned} \vec{NC} \cdot \vec{AM} &= (\vec{NB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BM}) \\ &= \vec{NB} \cdot \vec{AB} + \vec{NB} \cdot \vec{BM} + \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{BM} \\ &= -NB \times AB + 0 + 0 + BC \times BM \end{aligned}$$

Or $AB = BC$ et $BM = BN$ donc $\vec{NC} \cdot \vec{AM} = 0$.

2ème méthode :

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AD}; \vec{AB})$. On pose $BN = BM = a$.

$$\text{Alors } \vec{AM} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{NC} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{NC} \cdot \vec{AM} = a \times 1 - 1 \times a = 0$$

Ex 55

I est le milieu de $[BC]$ donc $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$.

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{OI} \cdot \vec{DA} &= \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB}) \cdot (\vec{DO} + \vec{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OC} \cdot \vec{DO} + \vec{OC} \cdot \vec{OA} + \vec{OB} \cdot \vec{DO} + \vec{OB} \cdot \vec{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(0 + \vec{OC} \cdot \vec{OA} - \vec{OB} \cdot \vec{OD} + 0) \\ &= \frac{1}{2}(OC \times OA \times \cos(\vec{OC}; \vec{OA}) - OB \times OD \times \cos(\vec{OB}; \vec{OD})) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (\vec{OC}; \vec{OA}) &= (\vec{OC}; \vec{OB}) + (\vec{OB}; \vec{OA}) \\ &= (\vec{OC}; \vec{OB}) + (\vec{OD}; \vec{OC}) \\ &= (\vec{OD}; \vec{OB}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\cos(\vec{OC}; \vec{OA}) = \cos(\vec{OD}; \vec{OB}) = \cos(\vec{OB}; \vec{OD}) \text{ (le cosinus est pair et les angles sont de mesures opposées).}$$

De plus, $OA = OB$ et $OC = OD$ donc $\vec{OI} \cdot \vec{DA} = 0$. La conclusion s'ensuit.



6 Analyse Partie 1 (Lycée Henri IV)

Sur les pages suivantes... Ces sont des exercices de bons niveaux. Les exercices d'analyse du baccalauréat franco-allemand sont (en général) un peu plus longs. Nous aurons l'occasion d'en traiter au cours de l'année.

7 Analyse Partie 2 (Annales du baccalauréat)

Vous pouvez trouver sept exercices (problèmes) tombés au baccalauréat national avec de la fonction exponentielle sur ce lien :

<https://www.annales2maths.com/1ere-exercices-corriges-fonction-exponentielle-problemes/>

IV Fonctions

Ex 33 ☆☆☆

Dresser le tableau de variation des fonctions définies par les expressions suivantes :

- $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x - 5$
- $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$
- $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$
- $f(x) = \frac{-2x+3}{-2x+4}$

Ex 34 ☆☆☆

Déterminer l'expression (simplifiée) de la dérivée des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| $f_1(x) = x^3 - 5x^7 + \frac{3}{x}$ | $f_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - x\sqrt{3} + 3\sqrt{x}$ |
| $f_3(x) = (x^2 + 3)x^5$ | $f_4(x) = (3x - 2)^2$ |
| $f_5(x) = x^2\sqrt{x}$ | $f_6(x) = (x + 3)x^2\sqrt{x}$ |
| $f_7(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)x$ | $f_8(x) = \left(x + \frac{2}{x^2}\right)x$ |
| $f_9(x) = \frac{3}{x+1}$ | $f_{10}(x) = -2\frac{x^2+3}{x^2+3}$ |
| $f_{11}(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$ | $f_{12}(x) = \frac{x+2}{x+3}$ |
| $f_{13}(x) = \frac{x^3+1}{x-\frac{1}{x}}$ | $f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+\frac{3}{x}}$ |
| $f_{15}(x) = \frac{x-\frac{x}{x+1}}{x+\frac{1}{x}}$ | $f_{16}(x) = \frac{x^2+\frac{x}{3}}{x^2+\frac{x}{3}}$ |
| $f_{17}(x) = \frac{5\sqrt{x}}{1+\frac{x}{x}}$ | $f_{18}(x) = x\frac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{x}{3}}$ |
| $f_{19}(x) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ | $f_{20}(x) = \frac{1}{3}\frac{3+\frac{x}{x^2+2}}{x^2+2}$ |
| $f_{21}(x) = e^{4x-5}$ | $f_{22}(x) = \cos(2x+3)$ |
| $f_{23}(x) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ | $f_{24}(x) = (7x^2+5)e^{-x}$ |
| $f_{25}(x) = \frac{e^{3x}+2x^2}{e^x+1}$ | $f_{26}(x) = \frac{e^{3-2x}}{x^4-3x+1}$ |

Ex 35 ☆☆☆

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions ci-dessous lorsque x tend vers la valeur a indiquée.

On distinguera éventuellement la limite à gauche et la limite à droite.

- $\frac{x^3-1}{x^2-1}$; $a = 1$
- $\frac{x^3+27}{3x+9}$; $a = -3$
- $\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $a = 2$
- $\frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-3x+2}$; $a = 1$
- $\frac{3x^2-2mx-m^2}{2x^2-3mx+m^2}$ avec $m \in \mathbb{R}$; $a = m$
- $\frac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}$; $a = 3$
- $\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}$; $a = 4$
- $\frac{\sqrt{x^2-|x|}}{x}$; $a = 0$

$$9) \frac{\sqrt{3x^2-2x^2}}{5\sqrt{x^2}+x^2} ; a = 0.$$

Ex 36 ☆☆☆

Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions ci-dessous lorsque x tend vers la valeur a indiquée.

- $\frac{2x-3}{(4x+1)(x+5)}$; $a = -\infty$
- $\frac{3x^2-11x+4}{x^2+4x+4}$; $a = -2$
- $\frac{e^{2x-6}}{4x+5}$; $a = 3$
- $\cos\left(\frac{2x^2+x+\pi-3}{4x-1}\right)$; $a = 1$
- $\sin(2x+7)$; $a = -\infty$

Ex 37 ☆☆☆

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser si la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale ou non.

$$f_1(x) = \frac{2x^4-5x+1}{x^3+x^2+6} \quad f_2(x) = \frac{2x^2-x}{6x^2+7x}$$

$$f_3(x) = \frac{1-2x^5}{2x^8-x+12} \quad f_4(x) = \sqrt{2x^2+1}-x$$

$$f_5(x) = \frac{5x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad f_6(x) = \frac{1-e^{3x}}{3+2e^{3x}}$$

$$f_7(x) = \sqrt{x^2+1}-x$$

$$f_8(x) = \frac{3x^2-2x-m^2}{(m-2)x^2-3mx+m^2} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

Ex 38 ☆☆☆

Déterminer les limites en a des fonctions suivantes. Préciser dans chaque cas si la courbe de la fonction admet en a une asymptote verticale.

$$f_1(x) = \frac{3x-4}{x^2} \text{ en } a = 0;$$

$$f_2(x) = \frac{3x^2-3x-2}{(x-2)^3} \text{ en } a = 2;$$

$$f_3(x) = \frac{2\exp(\frac{x}{3})}{1-e^x} \text{ en } a = 0;$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \text{ en } a = 3;$$

$$f_5(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{e^x+3}} \text{ en } a = 0;$$

$$f_6(x) = \exp\left(\frac{2}{x^2-1}\right) \text{ en } a = 1.$$

Ex 39 ☆☆☆

On considère trois fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$, dont on donne ci-dessous les limites aux bornes de cet intervalle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

Déterminer, lorsque c'est possible, les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$$f+g; h-f; f.g; f.h; g+h; \frac{f}{g}; \frac{f}{h}; \frac{h}{g}; \frac{f+g}{h}; \frac{h+g}{f}.$$

On notera FI s'il s'agit d'une forme indéterminée.

Extension : on pourra essayer de proposer des exemples justifiant qu'il est impossible de conclure dans ces cas.

Ex 40 ☆☆☆

$$\text{Soit } f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x-x}.$$

- 1) Montrer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- 2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Donner les asymptotes éventuelles.
- 3) Étudier les variations de f puis en dresser le tableau de variation.

Ex 41 ☆☆☆

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A de coordonnées $(1; 1)$.

À tout réel $x > 1$, on associe le point M de coordonnées $(x; 0)$. On note N le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées.

- 1) Montrer que l'ordonnée du point N est donnée par $\frac{x}{x-1}$.
- 2) En déduire l'aire du triangle OMN .
- 3) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$. Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variation de f .
- 4) Quelle est la position du point M tel que l'aire du triangle MNO soit minimale?

Ex 42 ☆☆☆

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 11}{x + 4}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Vérifier que la dérivée f' de f s'exprime par $\frac{2x^2 + 16x + 31}{(x+4)^2}$.
- 3) Déterminer le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
- 4) Démontrer que $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$. On pourra effectuer une division polynomiale. En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

Ex 43 ☆☆☆

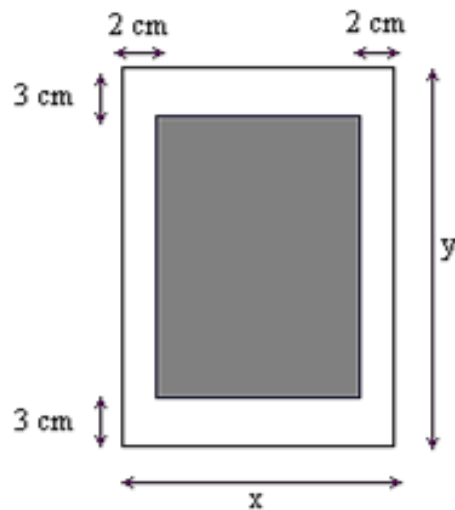
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Donner $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ son nombre dérivé en 0.
- 3) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- 4) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer sa dérivée f' .
- 5) Dresser le tableau de variations de f .
- 6) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Ex 44 ☆☆☆

Pour la fabrication d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à droite et à gauche et de 3 cm en haut et en bas.

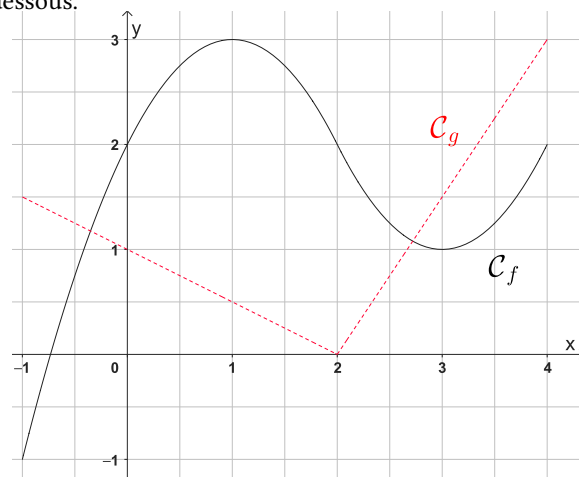


Soit x et y respectivement la largeur et la longueur de la page en cm.

- 1) Si $x = 28$ et $y = 31$, calculer l'aire de la portion de la page disponible pour l'impression.
- 2) On désire que la surface disponible pour l'impression soit de 600 cm^2 . Trouver la valeur de x pour laquelle la consommation de papier est minimale.

Ex 45 ☆☆☆

Deux fonctions f et g définies sur $[-1; 4]$ sont représentées ci-dessous.



- 1) Déterminer $g \circ f(0)$; $g \circ f(3)$; $f \circ g(0)$ et $f \circ g(2)$.
- 2) Déterminer les variations de $g \circ f$ sur $[-1; 4]$.

Ex 46 ☆☆☆

Soit $n \geq 2$ un entier fixé (quelconque) et soit f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}.$$

- 1) a) Expliquer pourquoi f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$.
b) Étudier le signe de $f'_n(x)$ et montrer que f_n atteint un minimum que l'on déterminera.
- 2) a) En déduire l'inégalité suivante, pour $x \geq 0$:

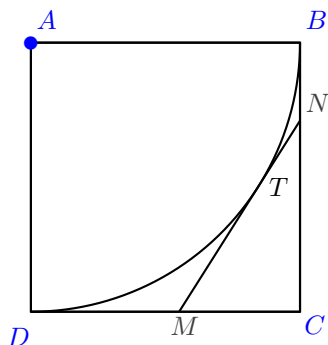
$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1} (1 + x^n).$$

- b) En déduire que, si x et y sont des réels positifs,

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1} (x^n + y^n).$$

Ex 47 ☆☆

$ABCD$ est un carré de côté 1. $\mathcal{C}$ est le quart de cercle de centre A , de rayon AB , contenu dans le carré.



T est un point de $\mathcal{C}$ distinct de B et D . La tangente en T à $\mathcal{C}$ coupe $[DC]$ en M et $[BC]$ en N .

On pose $x = DM$ et $y = BN$.

- 1) a) Démontrer que $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.
- b) Établir que $MN = MT + TN = x + y$.
- c) Exprimer alors MN en fonction de x .
- 2) f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

- a) Calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f .
- b) Étudier les variations de f .
- 3) Pour quelle position de M la longueur MN est-elle minimale ?

Ex 48 ☆☆

★ **Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire**

La fonction d est définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

- 1) Calculer la fonction dérivée d' .
En déduire les variations de d .
- 2) Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
- 3) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.

★ **Partie B. Étude de la fonction f**

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

- 1) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
Préciser la position relative de (D) et $(\mathcal{C})$.
- 2) a) Pour $x \in] -1; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Vérifier que $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.
En déduire le sens de variations de f' .
- b) Dresser le tableau de variations de f' .
(On admettra que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.)
- 3) On admet que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $] -1; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.

- 4) a) Étudier les variations de f .
- b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- c) Dresser le tableau de variations de f .

★ **Partie C. Prolongement de la fonction f en -1**

On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

- 1) a) Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right).$$

- b) Pour $x \in] -1; +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$.
- c) En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.
- 2) Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses -1 , α , 0 .

Ex 49 ☆☆

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

- 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
- 4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

- 1) On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
- 2) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

- 3) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

- 4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

$$1) \mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2}; \quad \mathbb{P}(P_1) = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}_{G_1}(G_2) = 0,6$ car si elle gagne une partie, la probabilité pour qu'elle gagne la suivante est 0,6.

$\mathbb{P}_{P_1}(G_2) = 0,3$ car si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.

(G_1, P_1) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_2 \cap G_1) + \mathbb{P}(G_2 \cap P_1)$$

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}_{G_1}(G_2) \times \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}_{P_1}(G_2) \times \mathbb{P}(P_1) = 0,6 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 = 0,45.$$

$$2) \mathbb{P}(P_2) = 1 - \mathbb{P}(G_2) = 0,55.$$

Partie B

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \mathbb{P}(G_n)$ et $y_n = \mathbb{P}(P_n)$

$$1) \mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

2) (G_n, P_n) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n \cap G_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(G_n) + \mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) \times \mathbb{P}(P_n)$$

$$= 0,6 \times \mathbb{P}(G_n) + 0,3 \times \mathbb{P}(P_n) \quad \text{d'où} \quad x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n.$$

(G_n, P_n) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap P_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(P_n) + \mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(G_n)$$

$$= 0,7 \times \mathbb{P}(P_n) + 0,4 \times \mathbb{P}(G_n) \quad \text{d'où} \quad y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$$

et on obtient le système demandé.

3) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$

$$a) v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n = x_n + y_n = v_n$$

$$\text{de plus } v_1 = \mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(G_1) = 1$$

donc (v_n) est une suite constante de terme général 1.

$$b) w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n = 1,2x_n - 0,9y_n = 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$$

$$w_1 = 4\mathbb{P}(G_1) - 3\mathbb{P}(P_1) = 0,5$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 0,5$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1}$.

4) a) On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 4x_n - 3y_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1} \end{cases}$

$$\text{d'où } 7x_n = 0,5 \times (0,3)^{n-1} + 3 \quad \text{et} \quad x_n = \frac{1}{7}(0,5 \times (0,3)^{n-1} + 3).$$

$$b) -1 < 0,3 < 1, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^{n-1} = 0, \text{ d'où}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7}$$

Donc (x_n) est convergente et converge vers $\frac{3}{7}$.



IV Fonctions

Ex 33

Le sens de variation d'une fonction est donné par le signe de sa fonction dérivée.

$$1) f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x - 5.$$

f est un polynôme du troisième degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6)$.

f' est un trinôme du second degré de discriminant réduit $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ et qui admet donc deux

racines réelles $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f						

$$2) f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

$f = u + 3v$, avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$, et $v(x) = \frac{1}{x}$

donc $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$, et alors $f' = u' + 3v'$, soit, pour tout

$$\text{réel } x \text{ non nul, } f'(x) = 2 - 3\frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 3}{x^2}.$$

Le numérateur est du second degré et admet comme racines

$$2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff \left(x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

et alors

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$2x^2 - 3$	+	0	-	0	+
x^2	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

$$3) f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-3$ donc $u'(x) = 2$, et $v(x) = x+5$

donc $v'(x) = 1$, et alors $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) =$

$$\frac{2(x+5) - (2x-3)1}{(x+5)^2} = \frac{13}{(x+5)^2}$$

Comme, pour tout réel x , $(x+5)^2 \geq 0$, et $(x+5)^2 = 0 \iff x = -5$, on a, pour tout réel $x \neq -5$, $f'(x) > 0$, et donc f est strictement croissante sur $] -\infty; -5[$ et sur $] -5; +\infty[$ (et n'est pas définie pour $x = -5$).

$$4) f(x) = \frac{-2x+3}{-2x+4}$$

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x + 3$ donc $u'(x) = -2$, et $v(x) = -2x + 4$ donc $v'(x) = -2$, et alors $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \frac{-2(-2x+4) - (-2x+3)(-2)}{(-2x+4)^2} = \frac{-2}{(-2x+4)^2}$
Comme, pour tout réel x , $(-2x+4)^2 \geq 0$, et $(-2x+4)^2 = 0 \iff x = 2$, on a, pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) < 0$, et donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$ (et n'est pas définie pour $x = 2$).

Ex 34

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= \frac{3x^4 - 35x^8 - 3}{x^2} & f'_2(x) &= \frac{4x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{3x} + 3}{2\sqrt{x}} \\ f'_3(x) &= x^4(7x^2 + 15) & f'_4(x) &= 6(3x - 2) \\ f'_5(x) &= \frac{5}{2}x\sqrt{x} & f'_6(x) &= \frac{1}{2}x\sqrt{x}(7x + 15) \\ f'_7(x) &= 2x & f'_8(x) &= \frac{2(x^3 - 1)}{20x} \\ f'_9(x) &= \frac{-3}{(x+1)^2} & f'_{10}(x) &= \frac{1}{(x^2 + 3)^2} \\ f'_{11}(x) &= 5\frac{-x^2 + 3}{(x^2 + 3)^2} & f'_{12}(x) &= \frac{1}{(x+3)^2} \\ f'_{13}(x) &= \frac{-x(x^3 + 3x - 2)}{(x^3 + 1)^2} & f'_{14}(x) &= -3\frac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}(x^2 + 3)^2} \\ f'_{15}(x) &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} & f'_{16}(x) &= 3\frac{x^3 - 27x - 6}{x^3(3x + 1)^2} \\ f'_{17}(x) &= \frac{5\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2} & f'_{18}(x) &= \frac{1}{3} \\ f'_{19}(x) &= \frac{1}{x^2} & f'_{20}(x) &= \frac{-x^2 - 6x + 2}{(x^2 + 2)^2} \\ f'_{21}(x) &= 4e^{4x-5} & f'_{22}(x) &= -2\sin(2x+3) \\ f'_{23}(x) &= 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) & f'_{24}(x) &= \frac{-7x^2 + 14x - 5}{e^x} \\ f'_{25}(x) &= \frac{2e^{4x} + 3e^{3x} + 2xe^x(2-x) + 4x}{(e^x + 1)^2} \\ f'_{26}(x) &= e^{3-2x}\frac{-2x^4 - 4x^3 + 6x + 1}{(x^4 - 3x + 1)^2} \end{aligned}$$

Ex 35

- $\frac{3}{2}$ en factorisant par $x - 1$.
- 9 en factorisant par $x + 3$.
- $\frac{-1}{3}$ en factorisant par $x - 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) = +\infty$.
- En factorisant par $x - m$ on trouve $f_5(x) = \frac{3x + m}{2x - m}$ pour $x \neq m$. La limite est donc de $\frac{3}{2}$ lorsque $m = 0$ et de 4 sinon.
- Par forme conjuguée puis factorisation par $x - 3$, la limite est de $\frac{4}{3}$.
- Par forme conjuguée puis factorisation par $x - 4$, la limite est de 1.
- Il n'y a pas de limite en 0, la fonction n'étant pas définie sur $] -1; 1[$.
- $f_9(x) = \frac{\sqrt{3} - 2|x|}{5 + |x|}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_9(x) = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ex 36

- 0^-
- $+\infty$ car le numérateur est réel positif alors que le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives)

- $\frac{1}{17}$
- $\frac{1}{2}$ car la fraction rationnelle tend vers $\frac{\pi}{3}$
- pas de limite

Ex 37

- fraction rationnelle. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$. Pas d'asymptote horizontale.
- fraction rationnelle. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{6x^2} = \frac{1}{3}$. asymptote horizontale $y = \frac{1}{3}$.
- fraction rationnelle. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 0^+$. asymptote horizontale $y = 0$.
- On a $f_4(x) = |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x$.
En $+\infty$, $|x| = x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = +\infty$.
En $-\infty$, $|x| = -x$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{|x|}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) = -5$. Il y a deux asymptotes horizontales : $y = -5$ et $y = 5$.
- En $+\infty$, on factorise par e^{3x} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = \frac{-1}{2}$.
En $-\infty$, on a directement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_6(x) = \frac{1}{3}$.
Deux asymptotes horizontales $y = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{-1}{2}$.
- $f_7(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x$.
En $+\infty$, $|x| = x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = 0$.
En $-\infty$, $|x| = -x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = +\infty$ par produit.
 $y = 0$ est la seule asymptote horizontale.
- Si $m = 2$, on simplifie $f_8(x) = \frac{3x^2 - 2x - 4}{-6x + 4}$ qui est une fraction rationnelle dont les limites sont $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_8(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_8(x) = +\infty$. Pas d'asymptote horizontale. Sinon, les numérateur et dénominateur de f_8 sont de même degré, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_8(x) = \frac{3}{m-2} \cdot y = \frac{3}{m-2}$ est asymptote horizontale.

Ex 38

- Lorsque $x \rightarrow 0$, le numérateur est négatif et fini, le dénominateur tend vers 0 par valeurs positive. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$ et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.
- Lorsque $x \rightarrow 2$, le numérateur est positif et fini, le dénominateur tend vers 0 et il est du signe de $(x - 2)$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f_2(x) = \pm\infty$ et la droite $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \exp\left(\frac{x}{3}\right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^x = 0$. Or on sait que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $e^0 = 1$ donc le dénominateur est du signe opposé à celui de x .
Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f_3(x) = \mp\infty$ et l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.

- 4) Par forme conjuguée, on a $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$ dont la limite est $\frac{1}{4}$ lorsque $x \rightarrow 3$. Pas d'asymptote verticale.
- 5) Par forme conjuguée, on a $f_5(x) = -2 - \sqrt{e^x + 3}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_5(x) = -4$. Pas d'asymptote verticale.
- 6) On a $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} x^2 - 1 = 0^\mp$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{1}{x^2 - 1} = \mp\infty$ et, par composition, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f_6(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_6(x) = 0^+$. La droite $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe.

Ex 39

fonction	$f+g$	$h-f$	$f.g$	$f.h$	$g+h$
en $-\infty$	$+\infty$	FI	FI	$+\infty$	$+\infty$
en $+\infty$	0	$-\infty$	0	FI	$-\infty$

fonction	$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{h}$	$\frac{h}{g}$	$\frac{f+g}{h}$	$\frac{h+g}{f}$
en $-\infty$	FI	FI	FI	FI	FI
en $+\infty$	FI	0	FI	0	FI

Ex 40

- 1) On s'interroge sur l'ensemble de définition de f . Celle-ci est définie partout où son dénominateur est non nul. Soit g ce dénominateur, donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
 g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel x , on a $g'(x) = e^x - 1$.
 Connaissant la stricte croissance de la fonction exp et le fait que $\exp(0) = 1$, on a immédiatement le tableau de variation suivant pour g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g			

La fonction g admet donc un minimum de 1 en $x = 0$, elle est par conséquent strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f est belle et bien définie sur $\mathbb{R}$.

- 2) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = +\infty$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
 D'autre part, lorsque $x \rightarrow +\infty$,
 on a $f(x) = \frac{e^x}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (par croissances comparées) et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- 3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). On calcule alors,
 $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{(-x+1)e^x}{(e^x - x)^2}$. Or, pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$. La dérivée f' est donc du signe de $(1-x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
f			

Ex 41

- 1) Soit le point $A'(1, 0)$. Comme le repère est orthonormal les droites (AA') et (Oy) sont toutes les deux perpendiculaires à (Ox) . Elles sont donc parallèles.
 De plus, $x > 1$ donc $M \neq A'$.
 Dans le triangle MNO , d'après le théorème de Thalès :
 $\frac{MA'}{MO} = \frac{AA'}{ON}$. Donc $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{y_N}$ d'où $y_N = \frac{x}{x-1}$.
- 2) Aire du triangle OMN : $\frac{x^2}{2(x-1)}$
- 3) La fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]1; +\infty[$.
 $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x \times (x-1) - x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$
 Pour tout $x > 1$, on a $x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$.

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f			

Pour tout $x > 1$, on a $x-1 > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{x^2}{2x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{x}{2(1 - \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- 4) La fonction f admet un minimum de 2 en $x = 2$. On en déduit que la position du point M telle que l'aire du triangle MNO soit minimale correspond à $x = 2$. On a alors $M(2; 0)$.

Ex 42

- 1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- 2) On dérive. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(x+4) - (2x^2+5x-11) \times 1}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 16x + 5x + 20 - 2x^2 - 5x + 11}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 16x + 31}{(x+4)^2}$$

- 3) La dérivée f' est du signe de son numérateur, qui est un polynôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 2 \times 31 = 8 > 0$: il y a deux racines réelles.
 Ce sont $x_1 = \frac{-16 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-8 - \sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-8 + \sqrt{2}}{2}$.

Du fait du coefficient dominant, ce numérateur est positif en dehors de l'intervalle des racines. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	-4	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
f					

Lorsque x tend vers -4 , le numérateur tend vers une valeur finie (1) et le dénominateur vers zéro. Les limites du quotient f sont donc infinies, et le signe de la dérivée permet de conclure.

- 4) Par division polynomiale (ou par réduction et identification), on prouve que $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x+4}$. Or la limite du dénominateur $x+4$ est infinie lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Par conséquent, et par différence, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (2x - 3) = 0$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de l'infini la droite $y = 2x - 3$ comme asymptote oblique. Les limites de $x \mapsto 2x - 3$ étant évidentes, on en déduit celles de f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ex 43

- $D_f = [0; +\infty[$.
- Dérivabilité en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{3}\sqrt{h}$$
Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- Équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Donc la tangente est l'axe des abscisses d'équation : $y = 0$.

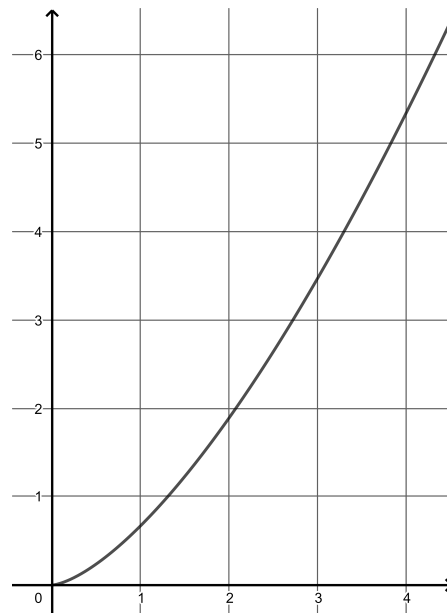
- 4) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
De plus, f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur D_f .
Pour $x \in]0; +\infty[$ on a,

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2(2x+x)}{6\sqrt{x}} = \frac{6x}{6\sqrt{x}}.$$
Donc $f'(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$ et comme $\sqrt{0} = 0 = f'(0)$. On a $f'(x) = \sqrt{x}$ pour tout x de D_f .
On dit que f est une *primitive* de la fonction racine carrée.
- 5) Pour tout x de D_f , $f'(x) \geq 0$ Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
f	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- 6) Voir graphique. La tangente en 0 est l'axe (Ox) .



Ex 44

- Si $x = 28$ et $y = 31$ la partie disponible pour l'impression a pour largeur $x - 4 = 28 - 4 = 24$ et pour longueur $y - 6 = 31 - 6 = 25$.
Donc sa surface est $s = 24 \times 25 = 600 \text{ cm}^2$.
- Soit s l'aire de la partie imprimable. On a : $s = (x - 4)(y - 6) = xy - 6x - 4y + 24 = y(x - 4) - 6x + 24$
De plus, on doit avoir $x > 4$ et $y > 6$. Comme on veut $s = 600$, on a la relation :
 $y(x - 4) - 6x + 24 = 600 \Leftrightarrow y(x - 4) = 600 + 6x - 24$.
Donc $y = \frac{576 + 6x}{x - 4}$ qui est bien définie pour $x > 4$.
On en déduit que $S(x) = xy = \frac{6x^2 + 576x}{x - 4}$ pour $x > 4$.

Étude de la fonction :

S est dérivable pour tout $x > 4$ en tant que fraction rationnelle.

$$\text{On a } S'(x) = \frac{(12x + 576)(x - 4) - 6x^2 - 576x}{(x - 4)^2} = \frac{(12x^2 + 576x - 48x - 2304 - 6x^2 - 576x)}{(x - 4)^2} = \frac{6x^2 - 48x - 2304}{(x - 4)^2}.$$

$$\text{Donc } S'(x) = \frac{6x^2 - 48x - 2304}{(x - 4)^2} = \frac{6(x^2 - 8x - 384)}{(x - 4)^2}$$

$$\text{Soit } p(x) = x^2 - 8x - 384$$

$\Delta = 64 + 1536 = 1600$, on a $\Delta > 0$ donc p admet deux racines dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{8 - 40}{2} = -16 \text{ et } x_2 = \frac{8 + 40}{2} = 24. \text{ On en déduit la factorisation de } p(x) = (x + 16)(x - 24). \text{ On a donc } S'(x) = \frac{6(x + 16)(x - 24)}{(x - 4)^2}.$$

Pour $x > 4$, on a $x - 4 > 0$ et $(x - 4)^2 > 0$.

Pour $x > 4$, on a $x + 16 > 0$ donc le signe de $S'(x)$ dépend de celui de $x - 24$.

x	4	24	$+\infty$	
$S'(x)$		$-$	0	$+$
S	$+\infty$		864	

Donc S admet un minimum de 864 pour $x = 24$. Il s'agit de la surface minimale de la page ayant une surface imprimable de 600 cm^2 . Elle correspond à $x = 24 \text{ cm}$ et $y = 36 \text{ cm}$. La consommation de papier est alors minimale.

Ex 45

- 1) $g \circ f(0) = g(2) = 0$; $g \circ f(3) = g(1) = \frac{1}{2}$
 $f \circ g(0) = f(1) = 3$ et $f \circ g(2) = f(0) = 2$.
- 2) • f est croissante sur $I_1 = [-1; 0]$ et g est décroissante sur $J_1 = [-1; 2]$ avec $f(I_1) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_1 .
- f est croissante sur $I_2 = [0; 1]$ et g est croissante sur $J_2 = [2; 4]$ avec $f(I_2) \subset J_2$ donc $g \circ f$ est croissante sur I_2 .
- f est décroissante sur $I_3 = [1; 2]$ et g est croissante sur J_2 avec $f(I_3) \subset J_2$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_3 .
- f est décroissante sur $I_4 = [2; 3]$ et g est décroissante sur J_1 avec $f(I_4) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est croissante sur I_4 .
- f est croissante sur $I_5 = [3; 4]$ et g est décroissante sur J_1 avec $f(I_5) \subset J_1$ donc $g \circ f$ est décroissante sur I_5 .

Ex 46

- 1) a) f_n est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
 $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x^n)(1+x)^{n-1}}{[(1+x)^n]^2}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1} [nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n)]}{(1+x)^{2n}}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1} (nx^{n-1} - n)}{(1+x)^{2n}}$$

$$= \frac{n(1+x)^{n-1} (x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{2n}}$$
- b) $f'_n(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$; or, la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et vaut 1 pour $x = 1$.
 Donc $x^{n-1} - 1 < 0$ pour $x < 1$ et $x^{n-1} - 1 > 0$ pour $x > 1$.
 $f_n(1) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
 On en déduit le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
f_n			

- 2) a) D'après les variations de f_n , on a :
 $\forall x \geq 0, f_n(x) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, donc $\frac{1+x^n}{(1+x)^n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
 On en déduit : $(1+x)^n \leq 2^{n-1} (1+x^n)$.
- b) Si $x = 0$, sachant que $n-1 \geq 1$, l'inégalité est évidente.
 Supposons $x > 0$ et posons $A = \frac{y}{x}$.
 D'après la question précédente, on a : $(1+A)^n \leq 2^{n-1} (1+A^n)$ d'où
 $\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \leq 2^{n-1} \left(1 + \frac{y^n}{x^n}\right)$.
- On en déduit : $\left(\frac{x+y}{x}\right)^n \leq 2^{n-1} \left(\frac{x^n+y^n}{x^n}\right)$ d'où
 $(x+y)^n \leq 2^{n-1} (x^n+y^n)$, en multipliant de chaque côté par $x^n > 0$.

Ex 47

- 1) a) $DM = x$ donc $MC = 1 - x$; de même, $CN = 1 - y$.

MCN est un triangle rectangle,

$$MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2.$$

- b) $MN = MT + TN$ (car M, T et N sont alignés dans cet ordre).

ADM est rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 1 + x^2$.

De même, AMT est rectangle (propriété de la tangente), donc $AM^2 = AT^2 + MT^2 = 1 + MT^2$ (car $AD = AT = 1$) d'où $MT = x$.

On montre de même que $NT = NB = y$.

- c) D'après ce qui précède, on a :
 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ donc
 $xy = 1 - x - y$ qui donne $y(1+x) = 1-x$ donc
 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

$$\text{Alors : } MN = x + y = x + \frac{1-x}{1+x} = \frac{x(1+x) + 1-x}{1+x} = \frac{x^2 + 1}{x+1}$$

- 2) f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x+1}$.

a)

f est dérivable sur $]0; 1[$;

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ v(x) = x + 1 \end{cases} \text{ et } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Soit $x \in]0; 1[$,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.

On étudie le signe du numérateur : $\Delta = 8 > 0$; il a deux racines, $\frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \notin]0; 1[$ et $-1 + \sqrt{2}$.

Signe de $f'(x)$

x	0	$\sqrt{2} - 1$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

- 3) MN est minimale pour $x = \sqrt{2} - 1$

Ex 48

★ Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

$$d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

- 1) En posant $u(x) = \frac{x}{x+1}$ qui est définie et dérivable sur $] -1; +\infty[$, $d(x) = e^{u(x)}$. d est donc dérivable et
 $d'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} e^{u(x)} = \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$
 $d'(x) > 0$ car produit de deux nombres > 0 .
 La fonction d est donc croissante sur $] -1; +\infty[$.
- 2) Comme $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$, alors par composition
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} d(x) = 0$.

Comme $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$,

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = e^1 = e$.

- 3) D'après la question précédente la fonction d croît de 0^+ à e donc pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.

★ **Partie B Étude de la fonction f**

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

- 1) On a vu dans la partie A que $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = e$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - e + 1) = 0.$$

Ceci montre que la droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

On a

$$f(x) - (x - e + 1) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}} - x - 1 + e = -e^{\frac{x}{x+1}} + e.$$

D'après la question A. 3, $0 < e^{\frac{x}{x+1}} < e$ donc $e - e^{\frac{x}{x+1}} > 0$.

Ce qui montre que la courbe (C) est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

- 2) a) Pour $x \in]-1; +\infty[$, $f(x) = x + 1 - d(x)$, donc f est dérivable et

$$f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}.$$

Cette fonction est elle-même dérivable et

$$f''(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \frac{2(x+1) - 1}{(x+1)^4} = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}.$$

Le signe de f'' est donc celui de $2x+1$, négatif pour $-1 < x < -\frac{1}{2}$, positif pour $x > -\frac{1}{2}$.

- b) D'où le tableau de variations :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f'(x)$	1	$1 - \frac{4}{e}$	1

- 3) Équation $f'(x) = 0$:

On a $f' \left(-\frac{1}{2} \right) < 0$ (calculatrice).

Par « continuité » la fonction f' s'annule deux fois sur $] -1 ; +\infty[$: en α tel que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ et aussi en 0 , avec $-\frac{1}{2} < 0$.

La calculatrice donne une valeur approchée de $\alpha \approx -0,72$ à 10^{-2} près.

- 4) a) D'après la question précédente, on peut déterminer le signe de f' et donc les variations de f :
- sur $] -1 ; \alpha]$, f est croissante ;
 - sur $[\alpha ; 0]$, f est décroissante ;
 - sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante.
- b) • Limite en -1 : on a vu que l'exponentielle a pour limite 0 , donc la limite de f est 0 ;
- Limite en $+\infty$: l'exponentielle a pour limite e , donc la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
- c) D'où le tableau de variations de f :

x	-1	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	0	$-\alpha(\alpha+1)$	0	$+\infty$

Calcul de $f(\alpha) = \alpha + 1 - e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$: on sait que

$$f'(\alpha) = 0 \iff 1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = 0 \iff e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = (\alpha+1)^2.$$

Donc

$$f(\alpha) = \alpha + 1 - e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \alpha + 1 - (\alpha+1)^2 = -\alpha(\alpha+1).$$

★ **Partie C Prolongement de la fonction f en -1**

On considère la fonction g définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{cases}$$

- 1) a) Si $x \in]-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} &= \frac{f(x) - 0}{x - (-1)} = \frac{x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}}{x + 1} \\ &= 1 - \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right).$$

- b) Pour $x \in]-1 ; +\infty[$, on a déjà vu que la limite lorsque x tend vers -1^+ de $\frac{x}{x+1}$ est $-\infty$.

En posant $u(x) = \frac{x}{x+1}$,

$\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} = ue^u = -\frac{-u}{e^{-u}}$, donc la limite quand u tend vers $-\infty$ est égale à zéro.

- c) La limite de $\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$ lorsque x tend vers -1^+ est donc finie : c'est la définition du nombre dérivé $g'(-1) = 1$.

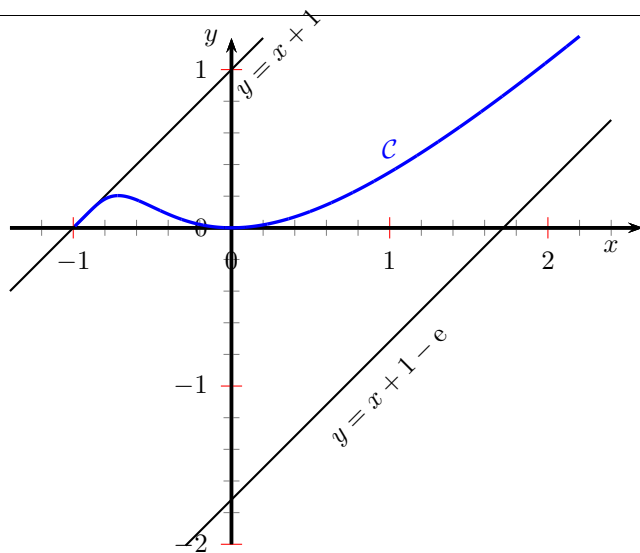
- 2) Construire (D) : La courbe (C') est la réunion de la courbe (C) et du point $(-1 ; 0)$.

La tangente à (C') au point $(-1 ; 0)$ a pour équation :

$$y = g'(-1)(x - (-1)) \iff y = x + 1.$$

La tangente à (C') au point d'abscisse α est horizontale : elle a pour équation $y = f(\alpha) = -\alpha(\alpha+1)$.

La tangente à (C') au point d'abscisse 0 est horizontale : elle a pour équation $y = f(0) = 0$ (axe des abscisses). D'où les graphes :



Ex 49

Partie A : étude de fonction

- 1) Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or (croissances comparées)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \text{ donc, par opérations sur les limites } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$.

- 2) On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 3) Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

- 4) Pour tout réel x , $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

- 1) La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1.$$

- 2) Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0;0) \in T_a &\Leftrightarrow 0 = (a+1)e^{a-1}(-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = e^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - a^2e^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

- 3) • 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

- Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$

$x > 0$, donc $x+2 > 0$ et par ailleurs $e^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On sait que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en 1.

Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.

Conclusion : sur $]0; +\infty[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- 4) La tangente cherchée est T_1 , elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire

$$y = 2x$$



V Repérage

Ex 50

- 1) Méthode géométrique.

- a) R est le projeté orthogonal de Q sur (AD) et D est le projeté orthogonal de C sur (AD) Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = \vec{DR} \cdot \vec{AR} = -AR \times DR$ (car les vecteurs $\vec{DR}$ et $\vec{AR}$ sont colinéaires de sens contraire)

P est le projeté orthogonal de Q sur (AB) et B est le projeté orthogonal de C sur (AB) Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AP} = \vec{BP} \cdot \vec{AP} = -AP \times BP$ (car les vecteurs $\vec{AP}$ et $\vec{BP}$ sont colinéaires de sens contraire)

Or $AP = DR$ et $AR = BP$ donc les deux produits scalaires sont égaux.

- b) $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} = \vec{CQ} \cdot \vec{AP}$ donc $\vec{CQ} \cdot \vec{AR} - \vec{CQ} \cdot \vec{AP} = 0$

$$\text{soit } \vec{CQ} \cdot (\vec{AR} - \vec{AP}) = 0$$

Donc $\vec{CQ} \cdot \vec{PR} = 0$ ce qui prouve que les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

- 2) Méthode analytique. On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

- a) Si P a pour coordonnées $(a; 0)$, $R(0, 1-a)$ et de $Q(a, 1-a)$.

b) $\vec{PR} = \begin{pmatrix} -a \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\vec{QC} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$

- c) $\vec{QC} \cdot \vec{PR} = -a(1-a) + (1-a)a = 0$. Les droites (CQ) et (RP) sont perpendiculaires.

Ex 51

- 1) Dans le triangle ABC , $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

