

HAUPTAUFGABE

25 Punkte

Die verschiedenen Teile sind unabhängig voneinander.

TEIL A (11 Punkte)

Auf einer kleinen Insel gibt es eine Mäusepopulation, die sehr wichtig für das Ökosystem ist, und die aus ca. 100 000 Individuen besteht. Die Anzahl der Mäuse hat sich über Jahrhunderte eingependelt und kann als stabil angesehen werden. Durch Vögel wird ein Virus auf die Insel eingeschleppt, das sich anschließend in der Mäusepopulation verbreitet.

Eine Forschergruppe entdeckt das Virus und beginnt mit einer wissenschaftlichen Untersuchung. Die Anzahl der infizierten Mäuse liegt zu Beginn der Datenerhebung am 1. Mai 2022 schon bei 2 000. Die Anzahl der infizierten Mäuse lässt sich modellieren durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{70\,000}{1 + 34 \cdot e^{-0,49t}}.$$

Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ die Zeit nach Beginn der Beobachtung in Monaten.

1) Schreiben Sie die folgende Tabelle ab und vervollständigen Sie sie:

Zeit nach Beginn der Beobachtung in Monaten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Datum															
Anzahl der infizierten Mäuse auf ganze Zahlen gerundet	2 000														

- 2) Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Anzahl der infizierten Mäuse während des ersten Monats der Untersuchung und vergleichen Sie die prozentuale Zunahme mit der prozentualen Zunahme während des Monats Oktober 2022. Runden Sie in dieser Teilaufgabe auf zwei Stellen nach dem Komma.
- 3) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f über dem Intervall $[0; 14]$ mit Hilfe der Werte aus der Tabelle in das vorbereitete und zu vervollständigende Koordinatensystem im Anhang ein.

- 4) a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist, und weisen Sie nach, dass der Grenzwert von f für $t \rightarrow +\infty$ 70000 ist. Man nennt diesen Grenzwert die Sättigungsgrenze.
- b) Beurteilen Sie die Eigenschaften der Funktion f aus 4a) im Sachzusammenhang. Erklären Sie auch, was der Grenzwert aus 4a) in der Realität bedeutet.
- 5) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Anzahl der infizierten Mäuse 99% der Sättigungsgrenze überschreitet. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen und bestimmen Sie damit auch das Datum, an dem dies geschieht (Annahme hier: 1 Jahr = 12 Monate, 1 Monat = 30 Tage).
- 6) Die Geschwindigkeit, mit der sich das Virus ausbreitet, wird in der Einheit infizierte Mäuse pro Monat angegeben.
- a) Beschreiben Sie (ohne Rechnung), wie die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet werden kann.
- b) Bestimmen Sie begründet anhand des Schaubilds aus Aufgabenteil A 3) den Zeitpunkt, an dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit am größten war.

Teil B (14 Punkte)

Zur Behandlung der Mäuse wird ein Medikament entwickelt. Die Kosten der Produktion können mit Hilfe einer Funktion $K(x)$ beschrieben werden, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $K(x)$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades (x in Mengeneinheiten ME des Medikaments und $K(x)$ in Geldeinheiten GE).
 - Das Kostenmaximum von $\frac{97}{15}$ GE wird bei einer Ausbringungsmenge von 2 ME erreicht.
 - Die Stückkosten bei einer Produktion von 3 ME liegen bei $\frac{31}{15}$ GE/ME.
 - Die variablen Kosten betragen $\frac{17}{15}$ GE bei einer Produktion von 1 ME.
- 1) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie daraus die Kostenfunktion K . Der GTR ist zum Lösen des linearen Gleichungssystems erlaubt.
- (Zur Kontrolle: $K(x) = \frac{1}{30}x^3 - 0,5x^2 + 1,6x + 5$)
- 2) Untersuchen Sie die Funktion K auf Extrem- und Wendepunkte.

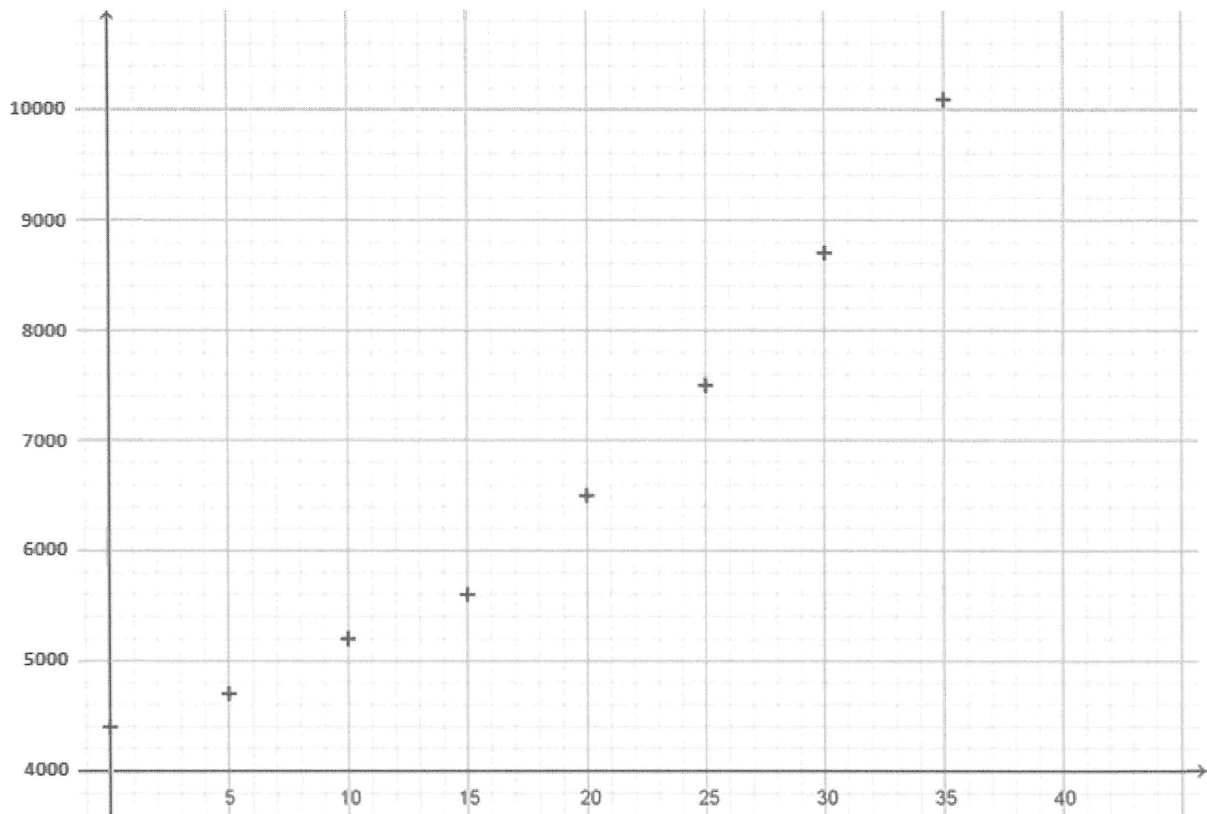
- 3) Berechnen Sie das Betriebsoptimum. Die hinreichende Bedingung muss hier nicht überprüft werden. *Der GTR ist erlaubt.*
- 4) Die Funktion E mit $E(x) = -\frac{29}{30}x^3 + 9,5x^2 + 5,6x - 35$ stellt die Erlösfunktion dar.
- a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G .
(Zur Kontrolle: $G(x) = -x^3 + 10x^2 + 4x - 40$)
- b) Berechnen Sie die Gewinnzone.
- c) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn auf zwei Nachkommastellen genau. Auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden. *Der GTR ist erlaubt.*

Punkteverteilung

A								B					
1)	2)	3)	4)	5)	6)	7a)	7b)	1)	2)	3)	4a)	4b)	4c)
1	1	1	1	2	2	2	1	4	3	2	1	3	1

Die Seite muss abgegeben werden

Anhang für Aufgabe 1



Anhang für die Hauptaufgabe

