

Teil A (5 Punkte)

Gegeben sind drei reelle Zahlen a, b, c , sowie die Funktion g und ihre Ableitungsfunktion g' :

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-0,1x}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$g'(x) = (a(-0,1x^2 + 2x) + b(-0,1x + 1) - 0,1c)e^{-0,1x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(C) ist der Graph der Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem.

Über den Graphen (C) ist bekannt:

- er verläuft durch den Punkt $A(0|-108)$;
- er besitzt eine waagerechte Tangente an der Stelle $x = -1$;
- er besitzt eine waagerechte Tangente an der Stelle $x = 24$.

Bestimmen Sie mithilfe dieser Informationen die Funktionsgleichung der Funktion g .

Teil B (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f , die für $x \in \mathbf{R}$ definiert ist, durch:

$$f(x) = (2x^2 - 6x - 108)e^{-0,1x}.$$

- 1) Untersuchen Sie begründet das Verhalten der Funktion f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- 2)
 - a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in \mathbf{R}$ und zeigen Sie, dass $f'(x)$ genau dann positiv ist, wenn gilt: $x \in [-1; 24]$.
 - b) Leiten Sie daraus die Monotonietabelle der Funktion f für $x \in \mathbf{R}$ ab.
 - c) Geben Sie zunächst die exakten Werte der lokalen Extrema von f an und runden Sie dann jeweils auf eine ganze Zahl.
- 3) Zeigen Sie, dass es eine einzige reelle Zahl $\alpha > 24$ gibt, so dass gilt: $f(\alpha) = 20$. Geben Sie mithilfe des GTR einen Wert von α an. Runden Sie auf zur nächsten ganzen Zahl.
- 4) Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f für $x \in \mathbf{R}$ ist:
$$F(x) = (-20x^2 - 340x - 2320)e^{-0,1x}.$$

Teil C (7 Punkte)

Die Erdölproduktion in einer Erdöllagerstätte im Jahr $2000 + n$ wird durch die Funktion f mit

$$f(n) = (2n^2 - 6n - 108)e^{-0,1n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \text{ in Millionen Barrel modelliert.}$$

Im Folgenden können die Ergebnisse aus Teil B genutzt werden.

- 1) Zeigen Sie, dass die Erdölproduktion im Jahr 2022 in dieser Erdöllagerstätte nach diesem Modell etwa 81 Millionen Barrel beträgt.
- 2) In welchem Jahr erreicht die Produktion ihr Maximum?
- 3) Es wird davon ausgegangen, dass die Förderung des Erdöls aus dieser Lagerstätte nicht mehr rentabel ist, sobald die jährliche Produktionsmenge unterhalb von 20 Millionen Barrel liegt. Ab welchem Jahr wäre dies der Fall?
- 4) Mit dem Ausdruck $\int_{15}^{25} f(x)dx$ lässt sich ein Näherungswert für die Gesamtproduktion vom Jahr 2015 bis zum Jahr 2025, in Millionen Barrel, angeben.
Berechnen Sie $\int_{15}^{25} f(x)dx$ und geben Sie das Ergebnis näherungsweise in Milliarden Barrel an.
- 5) Es wird geschätzt, dass die Menge des Erdöls, das von 2015 bis 2025 in dieser Lagerstätte produziert wird, 40% des Erdöls entspricht, das insgesamt in den Böden dieser Region lagert. Welche Erdölmenge lagert insgesamt in den Böden dieser Region?

Teil D (8 Punkte)

Der Preis (in Dollar) für ein Barrel Erdöl im Jahr $2000 + n$ wird durch die Funktion g mit

$$g(n) = 20e^{0,03n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{modelliert.}$$

Man geht außerdem davon aus, dass die Produktionskosten (in Dollar) für ein Barrel Erdöl im Jahr $2000 + n$ durch die Funktion c mit

$$c(n) = 1,5n + 5, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{gegeben sind.}$$

- 1) Berechnen Sie den Umsatz, der durch Erdölproduktion in der Lagerstätte aus Teil C im Jahr 2022 gemacht wird.
- 2) Es ist $B(n) = 20e^{0,03n} - 1,5n - 5$ der Gewinn pro Barrel Erdöl (in Dollar) im Jahr $2000 + n$.
 - a) Erklären Sie das Zustandekommen der Gewinnfunktion B .
 - b) Berechnen Sie, ob die Produktion eines Barrels Erdöl im Jahr 2030 gewinnbringend ist.
 - c) Bestimmen Sie mithilfe des GTR den Zeitraum in Jahren ab 2015, während dem die Produktion eines Barrels Erdöl gewinnbringend ist.
 - d) Berechnen Sie das Jahr, in dem der Verlust pro produziertem Barrel Erdöl maximal ist. Wie groß ist dann der Verlust?
 - e) Berechnen Sie $\int_{15}^{25} B(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis.