

## HAUPTAUFGABE

27 Punkte

Hinweis: Die GTR-Funktionalität des Taschenrechners darf nur dort zum Lösen der Aufgaben benutzt werden, wo dies ausdrücklich erlaubt ist.

### Teil A:

[15 Punkte]

Gegeben ist die Funktion  $a$  mit  $a(x) = (x^2 + x)e^{-0,5x}$  ;  $x \geq 0$ .

1. Untersuchen Sie die Funktion  $a$  auf:
  - a. Nullstellen,
  - b. Extrempunkte und Monotonie,
  - c. Verhalten für  $x \rightarrow +\infty$  und das Verhalten für  $x \rightarrow -\infty$ .
2. Die Funktion  $n$  mit  $n(x) = e^{2-x}$  ;  $x \geq 0$  stellt die Nachfragefunktion für das Produkt P dar. Dabei stellt  $x$  die Menge des Produktes P in Mengeneinheiten (ME) und  $n(x)$  den Preis des Produktes in Geldeinheiten (GE) dar. Der Graph der Funktion  $n$  ist bereits im Koordinatensystem abgebildet.  
Die Funktion  $a$  stellt in dem Intervall, in dem sie streng monoton wachsend ist, die Angebotsfunktion für das gleiche Produkt P dar.  
Der Gleichgewichtspreis ist der Preis, bei dem die vom Produzenten angebotene Menge mit der vom Verbraucher nachgefragten Menge übereinstimmt.  
  
Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis des Produktes P und die zum Gleichgewichtspreis umgesetzte Menge. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen. *(Der GTR ist erlaubt)*
3. Weisen Sie nach, dass die Funktion  $A$  mit  $A(x) = -2e^{-0,5x}(x^2 + 5x + 10)$  eine Stammfunktion der Funktion  $a$  ist.
4. Die Produzentenrente ist der zusätzliche Gewinn, den der Produzent durch den Verkauf zum Gleichgewichtspreis erzielt. Grafisch entspricht die Produzentenrente der Fläche PR, die im Schaubild eingezeichnet ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt PR auf drei Nachkommastellen genau.
5. Berechnen Sie die Tangentengleichung der Tangenten  $t$  an den Graph von  $a$  an der Stelle  $x_0 = 2$  exakt *(keine gerundeten Werte)*.  
Zeichnen Sie die Tangente in die Abbildung **im Anhang** ein.

6. Gegeben sind die Punkte Q (0|0), R ( $x|0$ ) und S ( $x|a(x)$ ) ;  $x > 0$ .
- Zeichnen Sie das Dreieck QRS für  $x = 3$  in das gegebene Koordinaten-system ein.
  - Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen genau, wie man  $x$  wählen muss, damit der Flächeninhalt des Dreiecks QRS maximal wird. Der Flächeninhalt des Dreiecks muss nicht berechnet werden. (*Der GTR ist erlaubt. Als hinreichendes Kriterium wird eine anschauliche Begründung akzeptiert.*)

**Teil B:**

[12 Punkte]

Ein Unternehmen produziert ein Produkt P, das von den Wettbewerbern in ähnlicher Qualität und zu ähnlichen Preisen hergestellt wird. Es kann sein Produkt P für einen Preis von 9 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) in beliebiger Menge verkaufen, ohne dass der Marktpreis sich verändert.

Die Kostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 12x + 10$  beschreibt die Produktionskosten in GE für dieses Produkt P.

- Stellen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion  $E$  auf.
- Stellen Sie den Funktionsterm für die Gewinnfunktion  $G$  auf.  
*Zur Kontrolle:  $G(x) = -0,5x^3 + 4x^2 - 3x - 10$*
- Skizzieren Sie die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion mit Hilfe des GTR in ein gemeinsames Koordinatensystem. (*Hinweis: x-Achse: 0ME bis 8ME, 1ME=2cm; y-Achse: -10GE bis 60GE, 10GE=2cm*)
- Berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze. (*GTR erlaubt*)
- Stellen Sie den Funktionsterm für die variablen Kosten sowie den Funktionsterm für die Fixkosten auf.
- Berechnen Sie den Term für die Grenzkostenfunktion.  
Berechnen Sie die minimalen Grenzkosten.
- Berechnen Sie den Term für die Stückkostenfunktion.  
Weisen Sie nach: Im Minimum der Stückkostenfunktion sind die Stückkosten gleich den Grenzkosten.
- Berechnen Sie die Produktionsmenge, für die der Gewinn maximal ist, auf drei Nachkommastellen.  
Berechnen Sie den maximalen Gewinn auf drei Nachkommastellen. (*Der GTR ist erlaubt*)

zu Teil A:

