

HAUPTAUFGABE

30 Punkte

Teil C kann unabhängig von Teil A und B bearbeitet werden.

Teil A

Die Firma PEACH führt ein neues Smartphone auf dem Markt ein.

Für die ersten 60 Tage sind die folgenden Verkaufszahlen aufgetreten:

Tag x	0	10	30	60
Verkaufszahlen y in Stück/Tag	0	81 870	164 640	180 720

Zur Modellierung der täglichen Verkaufszahlen des neu eingeführten Smartphones auf der Basis der obigen Tabelle schlägt die Planungsabteilung von PEACH die folgende Funktion f vor:

$$f(x) = 10\,000 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x} \quad (x \geq 0) \quad , \quad x \text{ in Tagen, } f(x) \text{ in Stück/Tag.}$$

1. Berechnen Sie k mit Hilfe der Verkaufszahlen des 30. Verkaufstags.

Für die folgenden Aufgaben sei $f(x) = 10\,000 \cdot x \cdot e^{-0,02x}$.

2. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert im gegebenen Kontext?

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer Rechnung, dass die maximal mögliche Anzahl an verkauften Smartphones etwa bei 184 000 Stück pro Tag liegt.
An welchem Tag würde diese Verkaufszahl erreicht?
4. An welchen Tagen liegen die durch die Funktion beschriebenen Verkaufszahlen mindestens 22% unter dem Maximum der Modellierung?
Wie viele Smartphones würden an diesen Tagen maximal verkauft?
5. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 400$ in ein Koordinatensystem.

6. Es darf ohne Beweis verwendet werden:

F mit $F(x) = -500\,000 \cdot (x + 50) \cdot e^{-0,02x}$ ist eine Stammfunktion von f .

- a. Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\int_0^{50} f(x) dx$ exakt.
- b. Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Teil B

Für die Firma PEACH ist es aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Produktionszyklus (d.h. die Zeit vom ersten bis zum letzten verkauften Smartphone) zu begrenzen.

Für diese Begrenzung stehen zwei Modelle zur Auswahl:

1. Modell A

Die Planungsabteilung setzt genau ab dem Tag $p_0 = 94$, an dem die Verkaufszahlen 22% unter dem Maximalwert liegen (nach dem Verkaufsmaximum), einen linearen Verlauf der Verkaufszahlen an. D.h. ab diesem Tag p_0 werden die täglichen Verkaufszahlen mit Hilfe der entsprechenden Tangentenfunktion errechnet.

- a. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle p_0 .
Zeichnen Sie diese Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.
- b. Ab welchem Tag verkauft die Firma nach diesem Modell keine Smartphones mehr?
- c. Stellen Sie einen mathematischen Ausdruck auf, mit dessen Hilfe man die insgesamt verkauften Smartphones nach Modell A errechnen kann.
- d. Wie viele Smartphones werden nach Modell A verkauft?

2. Modell B

Wenn insgesamt 22 000 000 Smartphones verkauft sind, stellt die Firma die Produktion der Smartphones ein.

- a. Formulieren Sie den rechnerischen Ansatz, um den Zeitpunkt, an dem 22 000 000 Smartphones verkauft sind, zu bestimmen.
- b. Geben Sie diesen Zeitpunkt an.

Teil C

Für die Lagerung der Smartphones muss die Firma PEACH eine neue Halle bauen. Die Halle soll die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche haben. Die Lagerhalle soll mit einem Volumen von genau 800m^3 möglichst kostengünstig hergestellt werden. Die Seitenlängen der Grundfläche sollen mindestens 8m und höchstens 14m betragen.

Die Kosten für die Wände betragen 450€ je m^2 , für die Decke 400€ je m^2 und für den Boden 300€ je m^2 .

1. Welche Kosten würde der Bau einer Halle verursachen, die eine Grundfläche von 169m^2 und eine Höhe $h = 5\text{m}$ hätte?

Würde der Bau dieser Halle in die Planung der Firma passen?

2. Zeigen Sie, dass sich die Kosten K für den Bau berechnen lassen mit:

$$K(a) = 700 a^2 + \frac{1\,440\,000}{a},$$

dabei steht a für die Länge der Grundseite der Halle in Metern.

3. Stellen Sie die Definitionsmenge für die Funktion K im Kontext der Aufgabe auf.
4. Wie lang müsste die Grundseite a und die Höhe h der Halle sein, damit die Kosten für den Bau minimal werden?

Wie hoch sind in diesem Fall die Herstellungskosten?