

Hauptaufgabe

(32 Punkte)

Teil A

1. Gegeben ist die Funktion G mit $G(x) = x - 2 \ln(x+2) - 3$, mit $x \geq 0$.
 - a. Untersuchen Sie die Funktion G auf Monotonie.
 - b. Geben Sie mit Hilfe des GTR einen Näherungswert der Nullstelle der Funktion G an.
Runden Sie den Wert auf 2 Nachkommastellen.
2. Gegeben ist die Funktion K mit $K(x) = 0,02x^3 - 0,2x^2 + 0,7x + 4$, mit $x \geq 0$.
 - a. Berechnen Sie $K'(10)$.
 - b. Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten t_1 an der Kurve von K im Punkt $P(10|K(10))$.
 - c. Die Tangente t_2 an der Kurve von K soll durch den Ursprung $O(0|0)$ gehen und soll die Kurve von K im Punkt $B(u|K(u))$ berühren. Berechnen Sie den Wert u .
Der GTR kann verwendet werden. Runden Sie den Wert auf 2 Nachkommastellen.
 - d. Für den gerundeten Wert von u ergibt sich näherungsweise folgende Tangentengleichung: $t_2 : y = 0,85x$.
Zeichnen Sie die Schaubilder von K und t_2 für $0 \leq x \leq 10$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Teil B

Eine Firma möchte ein neues Fitnessgetränk auf den Markt bringen. Sie hat dafür zwei mögliche Produktionsverfahren zur Auswahl und kann maximal 1000 Getränke pro Tag produzieren.

Sie geht davon aus, dass sie alle produzierten Getränke für jeweils 1€ verkauft.

Produktionsverfahren 1

Die Funktion K aus **Aufgabenteil A** modelliert für $0 \leq x \leq 10$ die prognostizierten Gesamtkosten beim Produktionsverfahren 1.

Zur Erinnerung: K mit $K(x) = 0,02x^3 - 0,2x^2 + 0,7x + 4$.

Dabei gibt x die Anzahl der produzierten Getränke pro Tag in 100 Stück

und $K(x)$ die Gesamtkosten pro Tag in 100 € an.

Die Firma rechnet einen möglichen Gewinn für das Verfahren 1 durch.

1.
 - a. Stellen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion E auf.
 - b. Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion E für $0 \leq x \leq 10$ in das vorhandene Koordinatensystem.
 - c. Markieren Sie im Schaubild auf der x -Achse den Bereich, in dem die Firma mit Produktionsverfahren 1 einen Gewinn erzielt.
2.
 - a. Zeigen Sie, dass für den Gewinn gilt: $G_1(x) = -0,02x^3 + 0,2x^2 + 0,3x - 4$.
Dabei ist x die Anzahl der produzierten Getränke pro Tag in 100 Stück und $G_1(x)$ der Gewinn pro Tag in 100 €.
 - b. Erstellen Sie für G_1 eine vollständige Monotonietabelle für $0 \leq x \leq 10$.
Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen.
 - c. Wie viele Getränke muss die Firma produzieren, damit der Gewinn maximal ist?
Wie hoch ist dann dieser Gewinn?

3. Zu Werbezwecken überlegt die Firma, die Getränke anfangs so billig wie möglich zu verkaufen. Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe von **Aufgabenteil A**:

Welchen Preis muss die Firma für das Getränke mindestens verlangen, um keinen Verlust zu erzielen? Wie viele Getränke produziert die Firma dann?

Produktionsverfahren 2

Die Firma betrachtet nun auch das Verfahren 2.

Die Funktion G aus **Aufgabenteil A** modelliert für $0 \leq x \leq 10$ den Gewinn bei diesem Verfahren.

Zur Erinnerung: G mit $G(x) = x - 2\ln(x+2) - 3$

Dabei ist x die Anzahl der produzierten Getränke pro Tag in 100 Stück
und $G(x)$ der Gewinn pro Tag in 100 €.

Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe von **Aufgabenteil A**:

1. Wie viele Getränke muss die Firma mindestens verkaufen, um einen Gewinn zu erzielen?
2. Wann ist der Gewinn bei Verfahren 2 am höchsten? Wie hoch ist er dann?

Vergleich beider Produktionsverfahren

Die Firma ist sich nicht sicher, ob sie 1000 Getränke pro Tag verkaufen kann und überlegt entsprechend weniger zu produzieren.

Bei welchen Verkaufszahlen sollte sie sich für das Verfahren 1 und bei welchen für das Verfahren 2 entscheiden, wenn der Gewinn maximal sein soll?

Der GTR kann verwendet werden.

Teil C

Da das Fitnessgetränk neu auf dem Markt ist, startet die Firma zu Beginn eine Werbekampagne.

Für die Werbung entstehen zusätzliche Kosten. Die täglichen Kosten (in Euro) werden durch die

Funktion $w(x) = -e^{0,2x-1} + 3x + 150$ mit x in Tagen seit Beginn der Werbekampagne modelliert.

1. Bestimmen Sie eine Stammfunktion W der Funktion w .
2. Berechnen Sie $S = \int_0^{30} w(x) dx$.
3. Was bedeutet der Wert von S für die Firma?