

Hauptaufgabe

(28 Punkte)

Grundsätzlich sind rechnerische Lösungen mit dargestelltem Lösungsweg verlangt. Falls eine Lösung direkt durch den GTR erlaubt ist, ist dies explizit in der Aufgabe vermerkt.

Teil A: Analyse einer Funktion

Gegeben ist die Funktion k durch $k(x) = 0,5 - \frac{x}{30} \cdot e^{-\frac{1}{15}x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie $k(0)$ und untersuchen Sie das Verhalten von k für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.
2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von k und stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar. Berechnen Sie auch den Funktionswert an der Extremstelle.
3. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $k(x) = 0,49$ direkt mit dem GTR auf 4 Dezimalen genau.
4. Gegeben sind weiter die reellen Hilfsfunktionen h mit $h(x) = \frac{x}{30} \cdot e^{-\frac{1}{15}x+1}$ und H mit $H(x) = (ax + b) \cdot e^{-\frac{1}{15}x+1}$. Bestimmen Sie a und b so, dass H eine Stammfunktion von h ist.
Zur Kontrolle: $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{15}{2}$
5. Geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus **Teil A 4** eine Stammfunktion von k an und berechnen Sie damit den Wert des Integrals $\int_{15}^{70} k(x) dx$ exakt. Geben Sie ebenfalls ein auf 3 Stellen nach dem Komma gerundetes Ergebnis an.

Teil B: Steuern

Der Staat erhebt jährlich auf die Einkommen seiner Bürger Steuern, die sogenannte „Einkommenssteuer“.

Vergleichen Sie dazu auch Grenzkostenfunktion und Gesamtkostenfunktion.

Es gilt zu beachten, dass bis zu einem Einkommen von 15 000 € keine Einkommensteuer erhoben wird und die Grenzsteuer höchstens 50% (= 0,5) betragen darf.

x steht im Folgenden jeweils für das **Jahreseinkommen (in Einheiten von 1000 €)** und die Funktionswerte der Grenzsteuerfunktion geben den Grenzsteuersatz an.

Grundsätzlich sollen alle Ergebnisse auf **ganze Euro** gerundet werden.

1. Mit der Funktion k aus dem **Aufgabenteil A** definiert man eine Grenzsteuerfunktion St_k durch:

$$St_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 15 \\ k(x) & \text{für } x \geq 15 \end{cases}$$

- (a) Zeichnen Sie die Kurve der Funktion St_k für $x \in [0; 120]$ in ein Koordinatensystem.
1 cm auf der x-Achse soll 10 Längeneinheiten entsprechen und 2 cm auf der y-Achse 0,1 Längeneinheiten.

- (b) Für welches Jahreseinkommen erreicht der Grenzsteuersatz 49%?

Verwenden Sie auch das Ergebnis in Teil A3.

- (c) Das Integral $\int_{15}^n k(x) dx$ berechnet die Gesamtsteuer in Tausend Euro für ein Jahreseinkommen mit $n \geq 15$ in Tausend Euro.

Wie viel Steuern muss ein Bürger bezahlen, der ein Jahreseinkommen von 70 000 € hat? *Verwenden Sie auch das Ergebnis in Teil A5.*

2. Gesucht wird jetzt ein anderes Modell für die Grenzsteuerfunktion.

- (a) Stellen Sie eine lineare Funktion f auf, für die $f(15) = 0$ und $f(60) = 0,4$ gilt.

- (b) Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0,5$.

- (c) Mit der Funktion f soll ebenfalls eine Grenzsteuerfunktion definiert werden:

$$St_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 15 \\ f(x) & \text{für } 15 \leq x < 71,25 \\ 0,5 & \text{für } x \geq 71,25 \end{cases}$$

Zeichnen Sie die Kurve von der Funktion St_f in das vorhandene Koordinatensystem.

- (d) Das Integral $\int_{15}^n (\frac{2}{225}x - \frac{2}{15}) dx$ berechnet die Gesamtsteuer in Tausend Euro für ein Jahreseinkommen mit $15 \leq n \leq 71,25$ in Tausend Euro.

Wie viel Steuern muss ein Bürger bezahlen, der ein Einkommen von 70 000 € hat?

3. Im Folgenden werden diese beiden Modelle miteinander verglichen.

- (a) Welche Variante ist bei einem Einkommen von 70 000 € für den Steuerzahler günstiger?

- (b) Warum ist die folgende Aussage falsch?

„Die x -Werte der Schnittpunkte stehen für die Einkommen, für die nach beiden Modellen insgesamt gleich viel Steuern gezahlt werden müssen“.

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des GTRs, für welches Einkommen zwischen 15 000 € und 70 000 € in beiden Modellen die gleichen Gesamtsteuern zu bezahlen sind.

Bestimmen Sie dazu die passenden Stammfunktionen, die für $x = 15$ den Wert 0 haben.