

Teil A

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x \ln x - x - e$.

1. a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \rightarrow 0$ und für $x \rightarrow +\infty$.

(Hinweis: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^n = 0$.)

- b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und erstellen Sie eine Monotonietabelle.

- c) Zeigen Sie, dass $x_0 = e$ eine Nullstelle der Funktion f ist.

- d) Begründen Sie, dass es im Intervall $]0; +\infty[$ keine weitere Nullstelle gibt.

- e) Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle der Funktion f .

2. Gegeben sei nun die Funktion h mit $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x \in]0; +\infty[$.

- a) Zeigen Sie, dass H_c mit $H_c(x) = (\ln x)^2 - \ln x + \frac{e}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

eine Stammfunktion von h ist.

- b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion H von h , für die gilt: $H(1) = e + 1$

Teil B

Eine Schokoladenfabrik produziert Schokoladeneier. Die gesamten Produktionskosten werden durch die Kostenfunktion K mit $K(x) = x(\ln x - 1) \ln x + x + e$ beschrieben. Dabei werden die Produktionsmenge x in der Masseneinheit 100 kg und die Kosten in der Geldeinheit 300 € gegeben.

1. a) Untersuchen Sie das Verhalten der Stückkostenfunktion k für $x \rightarrow 0$ und für $x \rightarrow +\infty$.
b) Zeigen Sie, dass $k' = h$ gilt und schließen Sie mit den Ergebnissen aus **Teil A** auf die Monotonietabelle von k .

- c) Bei welcher auf kg gerundeten Produktionsmenge sind die Stückkosten minimal?
Geben Sie den minimalen Kilopreis an.
2. a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} K(x)$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert?
b) Bestimmen Sie die Funktionswerte $K(x)$ an den Stellen $x = e^{-1}$ und $x = 1$.
c) Zeichnen Sie mit Hilfe des GTRs das Schaubild der Funktion K für $0 < x \leq 5$.
(LE auf der x -Achse: 2 cm ; LE auf der y -Achse: 1 cm.)
3. Die Firma rechnet nun mit einer Umsatzfunktion U , die durch $U(x) = \left(\sqrt{e} + \frac{3}{4} \right) x$ angegeben ist. Die Verkaufsmenge x ist in der Masseneinheit 100 kg und der Umsatz in der Geldeinheit 300 € gegeben.
- a) Zeichnen Sie das Schaubild von U in das vorhandene Koordinatensystem ein.
b) Zeigen Sie, dass die Gewinnschwelle bei $x_1 = \sqrt{e}$ liegt und bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen einen Näherungswert für die Gewinnngrenze x_2 . (Runden Sie auf kg.)
c) Entnehmen Sie dem Schaubild diejenige Produktionsmenge, für welche der Gewinn der Fabrik maximal ist und berechnen Sie damit den Betrag des Gewinnes. (Runden Sie Ihren Wert auf 10 Euro.)
4. Die Firmenleitung der Schokoladenfabrik möchte zu Werbezwecken die Schokoladeneier so billig wie möglich anbieten. Welchen Preis muss sie pro kg mindestens verlangen, um nicht zwangsweise mit Verlust zu verkaufen. Wie groß ist dabei die zugehörige Outputmenge?
Eine zeichnerische Lösung ist erlaubt.