

Neuverschuldung und Gesamtverschuldung eines Staates

Teil A : Analyse einer Funktion

Gegeben ist die Funktion k durch

$$k(x) = 0,1(x+30)^2 e^{-0,05x} - 50, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Bestimmen Sie $k(0)$ und untersuchen Sie das Verhalten von k für $x \rightarrow -\infty$.
Für $x \rightarrow +\infty$ strebt die Funktion k gegen -50 .
- Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von k und stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar. Geben Sie auch die Extrempunkte an.
(zur Kontrolle : $k'(x) = -0,005 e^{-0,05x}(x-10)(x+30)$)
- Zeigen Sie, dass k auf dem Intervall $[0;100]$ genau eine Nullstelle α besitzt. Bestimmen Sie α direkt mit dem GTR auf 2 Stellen nach dem Komma genau.
- Zeichnen Sie das Schaubild von k in ein Koordinatensystem für x im Intervall $[0;160]$.
(Nehmen Sie ein ganze DIN-A4-Seite quer. Wählen Sie auf beiden Achsen 1 cm für 10 Einheiten. Dabei soll sich der Bereich auf der x -Achse von -60 bis 160 und auf der y -Achse von -60 bis 80 erstrecken.)
- Gegeben sind weiter die Hilfsfunktionen h mit $h(x) = 0,1(x+30)^2 e^{-0,05x}$ und H mit $H(x) = (-2x^2 - 200x - 5800) e^{-0,05x}$.
Beweisen Sie, dass H eine Stammfunktion zu h ist.
- Geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus **Teil A 5.** eine Stammfunktion von k an und berechnen Sie damit den Wert des Integrals $\int_0^{100} k(x) dx$ auf 1 Stelle nach dem Komma genau.

Teil B : Staatsschulden

Ein Staat hat in den letzten 60 Jahren jedes Jahr neue Schulden gemacht. Dies kann man anhand der Funktion f mit $f(x) = 40 e^{0,02x}$ modellieren : x bezeichnet dabei die Zeit in Einheiten von 1 Jahr und die Funktionswerte sind dann ein Maß für die jährliche Neuverschuldung in Einheiten von Milliarden € pro Jahr.

Der aktuelle Zeitpunkt wird dabei mit $x = 0$ festgelegt.

- Zeichnen Sie die Kurve von f auf dem Intervall $[-60;30]$ in das vorhandene Koordinatensystem.
- Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die aktuelle Neuverschuldung 40 Milliarden € beträgt.
- In wie vielen Jahren würde die jährliche Neuverschuldung die Grenze von 70 Milliarden € erstmalig überschreiten?

4. (a) Zeigen Sie durch die Berechnung des Integrals $\int_{-60}^0 f(x) dx$, dass die Gesamtschulden zum aktuellen Zeitpunkt ungefähr 1400 Milliarden € betragen.
Schraffieren Sie die entsprechende Fläche in der Grafik.
- (b) Berechnen Sie, wie hoch der Gesamtschuldenstand des Staates in 30 Jahren nach diesem Modell sein wird.

Teil C : Abtragen der Schulden

Jetzt wird dem Staat noch zugestanden, die Neuverschuldung aufgrund der aktuellen Probleme etwas zu erhöhen, bevor sie stark reduziert werden sollen, so dass dann in einigen Jahren sogar Schulden abgetragen werden können. Die Funktion k aus **Teil A** gebe nun die jährliche Neuverschuldung für $x \geq 0$ an.

(Einheiten wie in Teil B)

1. Wie hoch ist die maximale Neuverschuldung und in welchem Jahr wird diese erreicht?
2. Ab welchem Jahr werden zum ersten Mal keine neuen Schulden mehr gemacht?
3. (a) Interpretieren Sie das Ergebnis aus **Teil A 6.** ökonomisch in diesem Kontext.
(b) Beweisen Sie, dass die Gesamtverschuldung nach 100 Jahren insgesamt ungefähr 1890 Milliarden € betragen würde.
4. Es soll nun bestimmt werden, nach wie vielen Jahren tatsächlich alle Schulden abgetragen sein würden, die Gesamtschulden also bei Null angekommen wären.
 - (a) Schätzen Sie, ausgehend von den aktuellen Gesamtschulden, das Ergebnis mit Hilfe der Zeichnung aus **Teil A 4.** ab und beschreiben Sie kurz, wie Sie dabei vorgehen.
 - (b) Schreiben Sie den mathematischen Ansatz auf, mit dem man die Lösung der Aufgabe berechnen kann.

(Eine Umformung des Ansatzes oder eine weitere Lösung ist nicht verlangt.)