

Hauptaufgabe

(28 Punkte)

Teil A

Die Funktion h sei auf dem Intervall $[0; +\infty[$ durch $h(x) = (x^2 - 1) \ln(x+1)$ definiert.

1. Überprüfen Sie, dass auf dem Intervall $[0; +\infty[$ für die erste Ableitung der Funktion h gilt:
$$h'(x) = 2x \ln(x+1) + x - 1.$$
2. Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung der Funktion h auf dem Intervall $[0; +\infty[$ positiv ist.
3. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$.
4. Zeigen Sie, dass die Gleichung $h'(x) = 0$ folglich auf dem Intervall $[0; +\infty[$ nur eine einzige Lösung α besitzt.
5. Geben Sie für α einen Näherungswert mit zwei Dezimalen.
6. Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion h' in ein Koordinatensystem.
(x -Achse: 1LE entspricht 4cm; y -Achse: 1LE entspricht 1cm)
7. Die Tangente an dem Schaubild der Funktion h' im Punkt $(1 | h'(1))$ sei t .
 - a. Berechnen Sie eine Gleichung von t .
 - b. Zeichnen Sie die Gerade t in das vorhandene Koordinatensystem.
 - c. Berechnen Sie die x -Koordinate β des Schnittpunktes zwischen der x -Achse und der Gerade t .
 - d. Zeigen Sie, dass die prozentuale Abweichung zwischen α und β kleiner als 10 % ist.

Teil B

1. Stellen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Teilaufgabe A die Monotonietabelle der Funktion h auf.
2. Lösen Sie die Gleichung $h(x) = 0$ auf dem Intervall $[0; +\infty[$.

Teil C

Im Anhang sind die Schaubilder der Funktionen f und g gegeben, die auf dem Intervall

$]0 ; 4]$ durch $f(x) = \ln(x+1)$ und $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ definiert sind.

Der Preis x , den Konsumenten bereit sind, für eine Tonne eines Produktes zu zahlen, sei in Millionen Euro angegeben.

Die Funktion f ordne jedem Preis x die **Nachfragemenge** dieses Produktes durch den Konsumenten in der Einheit Tonnen zu.

Die Funktion g ordne jedem Preis x die **Angebotsmenge** dieses Produktes, die der Produzent anbietet, in der Einheit Tonnen zu.

Den Preis, für den die Nachfragemenge gleich ist mit der Angebotsmenge, nennt man den **Gleichgewichtspreis** des Marktes. Sei x_0 der **Gleichgewichtspreis** des Produktes und q_0 die **Gleichgewichtsmenge** des Produktes, die zu diesem Preis auf dem Markt ausgetauscht wird.

1. Geben Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus Teil B, den Gleichgewichtspreis x_0 und die Gleichgewichtsmenge q_0 des Marktes für das gegebene Produkt an.
2. Die Graphik im Anhang zeigt, dass die Konsumenten bereit sind, für das Produkt einen höheren Preis als den Gleichgewichtspreis zu zahlen. Der **Konsumentenüberschuss** ist die Ersparnis, die durch die Konsumenten realisiert wird. Dieser **Überschuss** (in der Einheit Millionen Euro) entspricht der im Koordinatensystem grau gekennzeichneten Fläche.

- a. Zeigen Sie, dass auf dem Intervall $]0 ; 4]$ die Funktion G mit

$$G(x) = -\left(\frac{1}{x} + 1\right) \ln(x+1) + \ln x$$

eine Stammfunktion der Funktion g ist.

- b. Berechnen Sie den Konsumentenüberschuss. Geben Sie einen auf Tausend Euro gerundeten Wert an.