

Hauptaufgabe

(28 Punkte)

TEIL A und TEIL B sind unabhängig voneinander.

TEIL A: Untersuchung einer e-Funktion.

Für alle reellen Zahlen x ist die Funktion f durch

$$f(x) = 4(x-1)^2 e^{-0,5x} \text{ gegeben.}$$

Ihr Schaubild ist die Kurve K_f .

1. Bestimmen Sie die Nullstelle von f .
2. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Was bedeutet das für K_f ?
3. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und die Extremwerte. Stellen Sie die Monotonietabelle von f auf.
4. Zeichnen Sie die Kurve K_f in ein Koordinatensystem im Bereich $0 \leq x \leq 10$. Verwenden Sie für beide Achsen die Einheit 1 cm.
5. Sei die Funktion F mit $F(x) = -8(x^2 + 2x + 5)e^{-0,5x}$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.
6. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_f mit den Koordinatenachsen einschließt.

TEIL B: Untersuchung einer ganzrationalen Funktion.

1. Für eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades gilt:
 $H(6|4,5)$ ist der Hochpunkt und $Q(3|3,5)$ ein weiterer Punkt ihres Schaubilds.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g .
(Kontrollergebnis: $g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$)
2. Zeichnen Sie K_g in das vorhandene Koordinatensystem ein.
3. Bestimmen Sie eine Stammfunktion G von der Funktion g .

TEIL C: Anwendung. Verdienst einer Person während ihres Berufslebens.

Die beiden Abiturientinnen Francine und Gabriele planen ihr späteres Berufsleben:

Francine möchte nach ihrem Studium im Alter von 25 Jahren eine Karriere in einem großen Unternehmen beginnen.

Die Funktion f aus **Teil A** stellt auf dem Intervall $[2,5 ; 7]$ einen typischen Brutto-Einkommensverlauf dar¹, den Francine zu erwarten hat. Der zehnfache Wert der Variable x gibt ihr Lebensalter an, $f(x)$ gibt in der Einheit 1000 € das zu erwartende Monatseinkommen in Abhängigkeit des Lebensalters an.

Gabriele plant nach dem Studium mit 25 Jahren den Einstieg in eine Laufbahn als Beamtin im höheren Dienst. Die Funktion g aus **Teil B** stellt modellhaft auf dem Intervall $[2,5 ; 7]$ ihr zu erwartendes Gehalt in der Einheit 1000 € dar. Auch hier gibt der zehnfache Wert von x das Lebensalter an.

1. In welchem Alter erzielt Francine voraussichtlich ihr höchstes Monatseinkommen? Wie hoch ist dieses? Beantworten Sie die gleichen Fragen für Gabriele.
2. In welchem Alter verdient Francine nach diesem Modell mehr als Gabriele?

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den gesamten Lebensverdienst von Francine und von Gabriele während ihres Berufslebens zu berechnen. Dabei wird obiges Einkommensmodell zugrunde gelegt. Die Fläche zwischen der Einkommenskurve (K_f für Francine und K_g für Gabriele) und der x -Achse in einem Intervall $[a ; b]$ stellt dabei ein Maß für das gesamte Einkommen vom Lebensalter a bis zum Lebensalter b dar.

3. Welche der beiden Abiturientinnen hat vom Eintritt in ihr Berufsleben mit 25 Jahren bis zu ihrem Eintritt in den Ruhestand im Alter von 70 Jahren ein größeres Gesamteinkommen zu erwarten? Geben Sie einen prozentualen Unterschied an. Wie groß ist das Gesamteinkommen von Francine in Euro?
4. Berechnen Sie das mittlere Einkommen von Francine zwischen dem 25. und dem 70. Lebensalter. Stellen Sie dieses mittlere Einkommen im vorhandenen Koordinatensystem graphisch dar. Bestätigen Sie damit das Ergebnis aus **Aufgabe 3**.
5. Zu welchem Zeitpunkt ihres aktiven Berufslebens haben Francine und Gabriele insgesamt gleich viel verdient?
(Lösung mit GTR)

¹ Quelle: Sibylle Wartlick, Diplomarbeit (VWL), Universität Würzburg 1995