

Suites et probabilités (17 janvier 2025)

Exercice 1

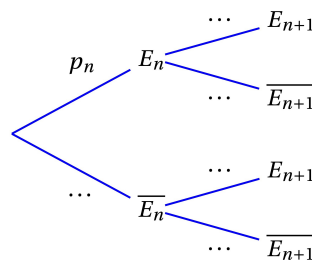
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- d. En déduire la limite de la suite (p_n) .

Exercice 2

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, décide d'arrêter de fumer; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé le n -ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,3; mais si elle a fumé le n -ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9. Pour $n \geq 0$, on note F_n l'évènement « la personne fume le n -ième jour » et p_n la probabilité de F_n . En particulier on a $p_0 = 1$.

1. Démontrer que $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,7$.
2. La personne va-t-elle s'arrêter de fumer?

Exercice 1

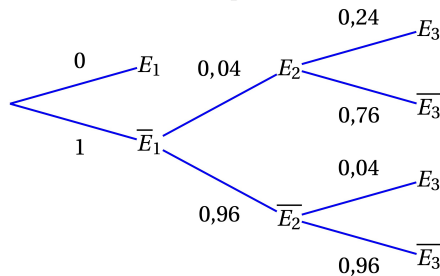
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



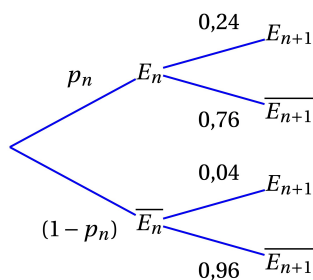
Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)

$$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048.$$

- (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre



- (b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1}$ (union d'évènements disjoints)

$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$

et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

(d) Limite de la suite (p_n) .

Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05$.

Exercice 2

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F_{n+1}) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}).$$

L'énoncé nous dit que

$$P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = 0,9 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}}) = 0,3$$

d'où

$$P_{F_n}(F_{n+1}) = 0,1 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0,7.$$

On a donc

$$p_{n+1} = 0,1p_n + 0,7(1 - p_n) = -0,6p_n + 0,7.$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. L'équation $\ell = -0,6\ell + 0,7$ donne $\ell = 7/16$. La suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \ell$ est une suite géométrique de raison $-0,6$, elle converge vers 0, et donc (p_n) tend vers $7/16$. La probabilité que la personne fume le n -ième jour tend vers $7/16$. Elle ne va pas s'arrêter de fumer!