

Aufgabe 1

(18 Punkte)

Herr Sonne errichtet auf dem Dach seines Hauses eine Photovoltaikanlage. Die Kosten zur Installation der Anlage belaufen sich auf 20 000 €.

Die Stromproduktion der Anlage schätzt Herr Sonne nach folgendem Modell:

- Im ersten Jahr des Betriebes liefert die Anlage mit dem Strom 6 000 kWh Energie.
- Aufgrund der Abnutzung produziert eine Solaranlage jedes Jahr 2 % weniger Solarstrom.

Der Staat garantiert Herrn Sonne die Abnahme des Stromes zu einem Preis von 0,30 € pro kWh über die Dauer von 20 Jahren.

Die Anlage geht am 1. Januar 2011 in Betrieb.

Teil A Einnahmen nach diesem Modell

Die Folge $(E_n)_{n \geq 0}$ bezeichnet Herrn Sonnes Einnahmen im Laufe des Jahres $2011+n$.

1. Zeigen Sie, dass Herr Sonne am Ende des Jahres 2011 mit einer Einnahme von 1 800 € rechnen kann.
2. Zeigen Sie, dass (E_n) eine geometrische Folge ist und geben Sie ihre explizite Formel an.

Wie hoch ist Herrn Sonnes Einnahme im zwanzigsten Jahr?

3. Mit welchen Einnahmen kann Herr Sonne insgesamt während der garantierten 20 Jahre rechnen?

Die Summe der Folgenglieder 0 bis n einer Folge (u_n) mit $u_n = u_0 q^n$ kann durch die geometrischen Summenformel $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ berechnet werden.

Teil B Finanzierung

Herr Sonne finanziert die Anlage mithilfe eines Kredites. Seine Bank gibt ihm einen Kredit zu einem festen jährlich Zinssatz von 4 %. Zur Tilgung (Zurückerstattung) des Kredites verwendet Herr Sonne die Einnahmen E_n aus **Teil A**.

Bei Betriebsbeginn am 01.01.2011 sind die Schulden $S_0 = 20\,000$ €.

S_n gibt für $n \geq 1$ den Schuldenstand am 1. Januar im Jahr $2011+n$ an, nachdem am jeweiligen Vortag die Zinsen berechnet und die Einnahmen bezahlt wurden.

Der Schuldenstand kann mit der rekursiven Formel $S_{n+1} = 1,04 S_n - E_n$ berechnet werden.

1. Rechnen Sie die Schuldenstände S_1 und S_2 aus.
2. Im Anhang befindet sich eine Tabelle, in welcher einige Werte der Folgen (S_n) und (E_n) eingetragen sind.

Füllen Sie die leeren Felder aus.

3. Wie viele Jahre muss Herr Sonne seine gesamten Einnahmen E_n der Bank bezahlen?

In welchem Jahr muss Herr Sonne nur noch einen Teil seiner Einnahmen an die Bank zurückzahlen?

Dieser letzte verzinst Teil wird „Schlussrate“ genannt.

4. Wie hoch ist die Schlussrate?
5. Berechnen Sie die Summe aller Tilgungen, die Herr Sonne bis zur vollständigen Abzahlung des Kredites der Bank bezahlt.
6. Folgern Sie daraus die Höhe der Kreditkosten, also die Summe der Zinsen, die Herr Sonne der Bank bezahlen muss.

Teil C Gewinn

Nach Tilgung des Kredites kann Herr Sonne die Einnahmen als Gewinn verbuchen.

1. In welchen Jahren macht Herr Sonne einen Gewinn? Wie hoch ist sein Gewinn nach 20 Jahren?
2. Wie groß würde der Gewinn sein, wenn der Staat die garantierte Stromabnahme von 20 Jahre auf 28 Jahre verlängert?