

# Révisions – probabilités – 14 mars 2025

## Exercice 1: Variables aléatoires et arbres

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note  $P_B(A)$  la probabilité conditionnelle de l'événement  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

$G$  = "le client achète une tablette gagnante"

$U$  = "le client gagne exactement une place de cinéma"

$D$  = "le client gagne exactement deux places de cinéma"

(a) Donner  $P(G)$ ,  $P_G(U)$  et  $P_G(D)$

(b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

(c) Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

(a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

(b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

(c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

# Solutions des exercices

## Solution 1

Sans idée d'exercice pour le devoir de mathématiques, M. Dhenin décide de préparer les purées de la semaine pour son enfant. Celui-ci dispose de cinq légumes et de trois viandes pour les préparer. Il imagine alors un exercice de combinatoire à donner à ses élèves de terminale qui seront ravis d'en apprendre davantage sur la vie passionnante de leur professeur.

1. Il y a  $\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 15$  recettes de purées comportant une viande et un légume.
2. Il y a  $\binom{5}{3}\binom{3}{1} = 30$  recettes de purées comportant une viande et 3 légumes.
3. Il y a  $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 21$  compotes différentes possibles. On choisit 1 OU 2 ingrédients, cela se traduit par une addition.
4. Le nombre de menus est de

$$\left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1}\right) \times \left(\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3}\right) \times \left(\binom{6}{1} + \binom{6}{2}\right) = 2100$$

(on traite d'abord la viande, puis les légumes, et enfin les fruits!)

5. Le nombre de menus possibles pour la semaine est donc de  $2100^7$ , soit 180108854100000 000000000 . Bon appétit !

## Solution 2

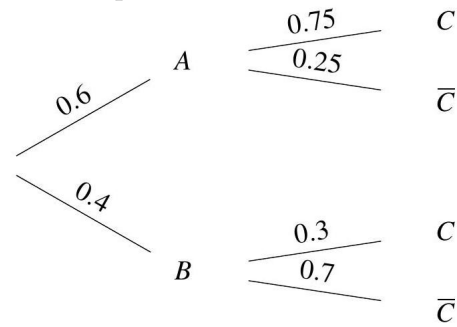
Lassé de son métier, un professeur de mathématiques a décidé de se reconvertir dans la boulangerie. Alice est une cliente régulière de cette boulangerie et vient souvent pour y acheter ses baguettes et son croissant. Le boulanger n'a pas pu s'empêcher de remarquer que le comportement d'Alice était le suivant :

- Dans 60% des cas, Alice achète une baguette lorsqu'elle vient à la boulangerie. Dans le cas contraire, elle en achète deux.
- Si Alice achète une seule baguette, il a 75% de chance qu'elle prenne également un croissant.
- Si Alice achète deux baguettes, elle ne prend un croissant que dans 30% des cas

Alice entre dans la boulangerie. On considère les événements suivants :

- $A$  : «Alice achète une seule baguette» ;
- $B$  : «Alice achète deux baguettes» ;
- $C$  : «Alice achète un croissant».

1. L'arbre pondéré suivant traduit la situation.



2. La probabilité qu'Alice achète deux baguettes et un croissant correspond à  $P(B \cap C)$ . On a

$$P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

3. Il est important pour cette question de préciser les hypothèses utilisées ! En l'occurrence, on précise que  $\{A; B\}$  est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) + P(C \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(C) + 0.12 \\ &= 0.6 \times 0.75 + 0.12 \\ &= 0.57 \end{aligned}$$

4. La probabilité que l'on recherche est  $P_C(B)$ . Par définition, on a

$$P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{0.12}{0.57} \simeq 0.211$$

Attention à bien arrondir à  $10^{-3}$  près comme le demande l'énoncé !

5. Le boulanger vend ses baguettes à 1,05 euros et ses croissants à 0,95 euros. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le prix payé par Alice lors de sa visite chez le boulanger.

(a) Le tableau suivant résume la loi de la variable aléatoire  $X$ .

| $k$        | 1,05 | 2    | 2,10 | 3,05 |
|------------|------|------|------|------|
| $P(X = k)$ | 0,15 | 0,45 | 0,28 | 0,12 |

Il suffit de faire le lien entre le prix et les événements : une dépense de 2 euros correspond à une baguette et un croissant, etc. Pour vérifier, on n'oublie pas que la somme des probabilités doit forcément valoir 1 .

- (b) L'espérance de  $X$  vaut  $0.15 \times 1.05 + 0.45 \times 2 + 0.28 \times 2.1 + 0.12 \times 3.05 = 2.0115$ . En moyenne, Alice dépense donc environ 2.01 euros en venant à la boulangerie.

### Solution 3

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwiches différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwiches en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwiches dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?  
A. 259459200  
B. 40320  
C. 16777216  
D. 6435

L'ordre est important et il n'y a pas de répétitions : il s'agit d'un arrangement. Le boulanger a donc 15 choix pour le premier sandwich, 14 pour le deuxième, 13 pour le troisième etc. La nombre de possibilités vaut donc  $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$  soit 259459200 .

**Réponse A.**

2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?

- A. 41  
B. 7200  
C. 2520  
D. 1800

Il y a 15 choix de sandwich, 12 choix de boissons et 14 choix de dessert. Le nombre de formules est donc de  $15 \times 12 \times 14$  soit 2520 . **Réponse C.**

3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?

- A. 720  
B. 2002  
C. 16000  
D. 126

Le client choisit 3 pâtisseries parmi 10 et 2 cookies parmi

4 . Le nombre de possibilités vaut donc  $\binom{10}{3} \binom{4}{2}$ , soit 720 . **Réponse A.**

4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookie personnalisé. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

- A. 10  
B. 240  
C. 25  
D. 64

Il y a deux choix de bases. Pour choisir les ingrédients, on a alors  $2^5$  possibilités (pour chaque ingrédient, on a 2 choix : le prendre ou pas). Le nombre total de cookies que l'on peut former est donc  $2 \times 2^5$  soit 64 . **Réponse D.**

