

Révisions – dénombrement – 7 mars 2025

Exercice 1

Für jede der folgenden Fragen wählen Sie bitte die richtige(n) Antwort(en) aus und begründen Sie Ihre Wahl.

Teil A : Eine Tasche enthält 4 gelbe Chips, nummeriert von 1 bis 4, 2 rote Chips, nummeriert mit 1 und 2, und 3 blaue Chips, nummeriert von 1 bis 3. Das Experiment besteht darin, zufällig und gleichzeitig 3 Chips aus der Tasche zu ziehen.

1. Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 Chips derselben Farbe zu ziehen, ist :

a. 2 b. 3 c. 5 d. 30

2. Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 Chips unterschiedlicher Farben zu ziehen, ist :

a. $\frac{4!}{2! \times 3!}$ b. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ c. 9 d. 24

Teil B : Es gibt ein Kartenspiel mit 32 Karten, darunter 8 Pik-Karten und 4 Asse, einschließlich des Pik-Asses.

1. Zwei Karten werden zufällig nacheinander und ohne Zurücklegen gezogen. Die Anzahl der möglichen Ziehungen ist :

a. 63 b. 496 c. 992 d. 1024

2. Zwei Karten werden zufällig und gleichzeitig aus diesem Spiel gezogen.

Die Anzahl der Ziehungen ohne „Ass“ und ohne „Pik“ ist :

a. 190 b. 210 c. 420 d. 441

Teil C : Wir betrachten alle fünfstelligen natürlichen Zahlen, die mit 5 Chips nummeriert von 1 bis 5 gebildet werden können. Die Anzahl der möglichen Zahlen ist :

a. 5! b. 5^5 c. $\binom{5}{5}$ d. 120

Exercice 2

Für jede der folgenden Fragen wählen Sie bitte die richtige(n) Antwort(en) aus. Es ist keine Begründung erforderlich (nutzen Sie es aus, das wird nicht immer so sein!).

1. Die Anzahl der Teilmengen mit 4 Elementen aus einer Menge mit 7 Elementen ist :

a. 105 b. $\frac{7!}{4! \times 3!}$ c. $\binom{6}{3} + \binom{6}{4}$ d. $\binom{7}{3}$

2. Die Anzahl der 10-stelligen Mobiltelefonnummern, die mit 0699 beginnen, ist :

a. 60 b. 60 466 176 c. 10^6 d. $\binom{10}{6}$

3. Bei einem Rennen mit 7 Läufern ist die Anzahl der möglichen Podiumsverteilungen :

a. $\frac{7!}{4!}$ b. $7 \times 6 \times 5$ c. $\binom{7}{3}$ d. 7!

4. Ein PIN-Code besteht aus 4 geordneten Ziffern. Camille erinnert sich nicht genau, aber sie weiß, dass die Ziffern 5, 6 und zweimal 1 enthalten sind, wobei die beiden 1 nicht aufeinanderfolgen. Die Anzahl der möglichen Codes unter diesen Bedingungen ist :

a. 4! b. 3^4 c. 6 d. $\binom{4}{3}$

5. Bei einem Firmenmeeting mit 20 Teilnehmern gibt jeder jedem die Hand. Die Anzahl der möglichen Händeschütteln ist :

a. 380 b. 190 c. $\binom{20}{2}$ d. $\frac{20!}{18!}$

Exercise 3

Ein undurchsichtiger Beutel enthält acht Chips, die mit den Zahlen 1 bis 8 nummeriert sind und sich durch Berührung nicht unterscheiden lassen. Ein Spieler zieht dreimal einen Chip aus dem Beutel, notiert seine Nummer und legt ihn dann wieder zurück. In diesem Zusammenhang nennt man eine „Ziehung“ die geordnete Liste der drei erhaltenen Zahlen.

Zum Beispiel, wenn der Spieler zuerst die Nummer 4, dann die Nummer 5 und schließlich die Nummer 1 zieht, entspricht die Ziehung (4; 5; 1).

1. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ziehungen.
2. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Ziehungen ohne Wiederholung einer Zahl.
(b) Leiten Sie daraus die Anzahl der Ziehungen ab, die mindestens eine Wiederholung einer Zahl enthalten.
3. Bestimmen Sie die Anzahl der Ziehungen :
(a) die genau einmal die Zahl 5 enthalten ;
(b) die die Zahl 5 überhaupt nicht enthalten.

Exercise 4

1. In der gymnasialen Oberstufe (Première) muss ein Schüler drei Fächer aus den zwölf angebotenen wählen. Wie viele mögliche Dreierkombinationen gibt es ?
2. In der Abschlussklasse (Terminale) müssen die Schüler zwei der drei in Première gewählten Fächer beibehalten. Wie viele Möglichkeiten hat Allan, der nun in Terminale ist, um seine Fächer zu wählen ?
3. Ein Bildungsweg besteht aus einer Dreierkombination von Fächern in Première und einer Zweierkombination dieser Fächer in Terminale.
 - (a) Begründen Sie, dass es insgesamt 660 verschiedene Bildungswege gibt.
 - (b) Pauline hat Mathematik sowohl in Première als auch in Terminale gewählt. Wie viele Bildungswege entsprechen dieser Wahl ?

Révisions – dénombrement – 7 mars 2025

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{10} [x^3 - 2x^2 + 5x]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50) \\ &= 85 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

Par une formule du cours, la hauteur moyenne de la ligne électrique est

$$\begin{aligned} \frac{1}{160} \int_{-80}^{80} h(x) dx &= \frac{1}{160} \int_{-80}^{80} 10 \left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}} \right) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[40e^{\frac{x}{40}} - 40e^{-\frac{x}{40}} \right]_{-80}^{80} \\ &= \frac{5}{2} (e^2 - e^{-2} - (e^{-2} - e^2)) \\ &= 5 (e^2 - e^{-2}) \\ &\approx 36,27 \text{ m} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :

- (a) le nombre total de tirages ;

Les boules sont extraites successivement (ordre) et avec remise (répétition), on cherche donc les 5-uplets d'un ensemble de 8 éléments. Il en existe $8^5 = 32768$.

- (b) le nombre de tirages tels que la première boule tirée soit noire et la deuxième soit rouge ; 5 choix pour la 1ère boule puis 3 pour la deuxième. Il reste 3 boules donc un triplet d'un ensemble de 8 éléments, il y a donc $5 \times 3 \times 8^3 = 7680$ tirages possibles.

- (c) le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée soit en troisième position. Cela signifie que les 2 premières sont noires, la 3ème rouge et aucune restriction pour les 2 dernières : $5 \times 5 \times 3 \times 8^2 = 4800$.

2. Reprendre la question 1. Dans le cas où l'on extrait les huit boules de l'urne successivement et sans remise.

- (a) Les boules sont extraites successivement (ordre) et sans remise (pas de répétition). On les extrait toutes, on cherche donc les permutations d'un ensemble de 8 éléments. Il en existe $8! = 40320$.

- (b) 5 choix pour la 1ère boule puis 3 pour la deuxième. Il reste une permutation des 6 dernières boules, il y a donc $5 \times 3 \times 6! = 10800$ tirages possibles.

- (c) Cela signifie que les 2 premières sont noires, la 3ème rouge et aucune restriction pour les 5 dernières : $5 \times 4 \times 3 \times 5! = 7200$.

3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : «les deux boules tirées sont rouges»

B : «les deux boules tirées sont de même couleur»

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

Tirages simultanés de deux boules : pas d'ordre ni répétition, ce sont des combinaisons.

Il existe $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ tirages possibles.

$\text{card}(A) = \binom{3}{2} = 3$ donc $P(A) = \frac{3}{28}$

$\text{card}(B) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 10 + 3 = 13$ donc $P(B) = \frac{13}{28}$

Solution de l'exercice 4 Le tournoi des 6 nations est un tournoi de rugby. Chaque équipe affronte les cinq autres une seule fois.

1. Combien de matchs sont disputés lors de ce tournoi ? Cela revient à dénombrer les combinaisons de deux équipes parmi 6 (pas d'ordre ni répétition) :

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

2. (a) Combien y a-t-il de classements différents ? Cela revient à dénombrer les permutations des 6 équipes :

$$6! = 720$$

- (b) Combien y a-t-il de classements différents avec la France à la 4^e place, sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ? Cela revient à dénombrer les permutations des 5 équipes restantes :

$$5! = 120$$

3. On demande au sélectionneur de l'équipe de France d'assister à une réunion avec les arbitres et cinq de ses joueurs. Il décide d'amener 5 joueurs parmi les 15 qui ont débuté le match.

- (a) Combien de groupes de 5 joueurs peut alors composer le sélectionneur ? Cela revient à dénombrer les combinaisons de 5 joueurs parmi 15 (pas d'ordre ni répétition) :

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \times 10!} = 3003$$

- (b) Il décide d'amener le capitaine de l'équipe. Combien de groupes de 5 joueurs peut-il alors composer ? Un joueur étant choisi, cela revient à dénombrer les combinaisons de 4 joueurs parmi 14 (15 joueurs moins le capitaine) :

$$\binom{14}{4} = 1001$$

Solution de l'exercice 5 Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre parmi A, B et C, et de 3 chiffres distincts ou non parmi les chiffres de 1 à 9.

1. Combien de codes différents peut-on former ?

Les codes sont constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers compris entre 1 et 9.

$$3 \times 9^3 = 2187$$

2. Combien de codes y a-t-il sans le chiffre 1 ? Les codes sont toujours constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers compris entre 2 et 9.

$$3 \times 8^3 = 1536$$

3. Combien de codes y a-t-il comportant au moins une fois le chiffre 1 ? Cet ensemble est le complémentaire du précédent : le contraire de « au moins un » est « aucun ».

$$2187 - 1536 = 651$$

4. Combien de codes y a-t-il comportant des chiffres distincts ? Les codes sont constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers distincts compris entre 1 et 9.

$$3 \times \frac{9!}{(9-3)!} = 3 \times 9 \times 8 \times 7 = 1512$$

5. Combien de codes y a-t-il comportant au moins deux chiffres identiques ? Cet ensemble est le complémentaire du précédent.

$$2187 - 1512 = 675$$

