

Révisions – fonctions et dénombrement – 5 mars 2025

Exercice 1

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

Exercice 2

La hauteur, en mètres, d'une ligne électrique de 160 m peut être modélisée par la fonction h définie sur $[-80 ; 80]$ par

$$h(x) = 10 \left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}} \right)$$

Quelle est la hauteur moyenne de cette ligne ?

Exercice 3

Eine Urne enthält acht Kugeln : fünf schwarze, nummeriert von 1 bis 5, und drei rote, nummeriert 6, 7 und 8. Die Kugeln sind durch Berührung nicht unterscheidbar.

- Es werden nacheinander fünf Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie :
 - die Gesamtzahl der Ziehungen ;
 - die Anzahl der Ziehungen, bei denen die erste gezogene Kugel schwarz und die zweite rot ist ;
 - die Anzahl der Ziehungen, bei denen die erste gezogene rote Kugel an dritter Stelle erscheint.
- Wiederholen Sie die vorherige Frage für den Fall, dass alle acht Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen aus der Urne gezogen werden.
- Es werden gleichzeitig zwei Kugeln aus der Urne gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse :
 - A : „Beide gezogenen Kugeln sind rot.“
 - B : „Beide gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe.“

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind als irreduzible Brüche anzugeben.

Exercice 4

Das Six-Nations-Turnier ist ein Rugby-Turnier. Jedes Team spielt einmal gegen die fünf anderen.

- Wie viele Spiele werden in diesem Turnier ausgetragen ?
- Wie viele verschiedene Ranglisten gibt es ?
 - Wie viele verschiedene Ranglisten gibt es mit Frankreich auf dem 4. Platz, wenn es keine Punktgleichheit gibt ?
- Der Trainer der französischen Mannschaft wird gebeten, an einem Treffen mit den Schiedsrichtern und fünf seiner Spieler teilzunehmen. Er entscheidet sich, 5 Spieler aus den 15 auszuwählen, die das Spiel begonnen haben.
 - Wie viele Gruppen von 5 Spielern kann der Trainer bilden ?
 - Er entscheidet sich, den Kapitän der Mannschaft mitzunehmen. Wie viele Gruppen von 5 Spielern kann er dann noch bilden ?

Exercice 5

Eine Tastatur mit 12 Tasten ermöglicht die Eingabe eines Codes für den Zugang zu einem Gebäude, bestehend aus einem Buchstaben (A, B oder C) und drei Ziffern (diese können unterschiedlich oder gleich sein) aus den Zahlen 1 bis 9.

- Wie viele verschiedene Codes können gebildet werden ?
- Wie viele Codes gibt es ohne die Ziffer 1 ?
- Wie viele Codes gibt es, die mindestens einmal die Ziffer 1 enthalten ?
- Wie viele Codes enthalten nur unterschiedliche Ziffern ?
- Wie viele Codes enthalten mindestens zwei gleiche Ziffern ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{10} [x^3 - 2x^2 + 5x]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50) \\ &= 85 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

Par une formule du cours, la hauteur moyenne de la ligne électrique est

$$\begin{aligned} \frac{1}{160} \int_{-80}^{80} h(x) dx &= \frac{1}{160} \int_{-80}^{80} 10 \left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}} \right) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[40e^{\frac{x}{40}} - 40e^{-\frac{x}{40}} \right]_{-80}^{80} \\ &= \frac{5}{2} (e^2 - e^{-2} - (e^{-2} - e^2)) \\ &= 5 (e^2 - e^{-2}) \\ &\approx 36,27 \text{ m} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :

- (a) le nombre total de tirages ;

Les boules sont extraites successivement (ordre) et avec remise (répétition), on cherche donc les 5-uplets d'un ensemble de 8 éléments. Il en existe $8^5 = 32768$.

- (b) le nombre de tirages tels que la première boule tirée soit noire et la deuxième soit rouge ; 5 choix pour la 1ère boule puis 3 pour la deuxième. Il reste 3 boules donc un triplet d'un ensemble de 8 éléments, il y a donc $5 \times 3 \times 8^3 = 7680$ tirages possibles.

- (c) le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée soit en troisième position. Cela signifie que les 2 premières sont noires, la 3ème rouge et aucune restriction pour les 2 dernières : $5 \times 5 \times 3 \times 8^2 = 4800$.

2. Reprendre la question 1. Dans le cas où l'on extrait les huit boules de l'urne successivement et sans remise.

- (a) Les boules sont extraites successivement (ordre) et sans remise (pas de répétition). On les extrait toutes, on cherche donc les permutations d'un ensemble de 8 éléments. Il en existe $8! = 40320$.

- (b) 5 choix pour la 1ère boule puis 3 pour la deuxième. Il reste une permutation des 6 dernières boules, il y a donc $5 \times 3 \times 6! = 10800$ tirages possibles.

- (c) Cela signifie que les 2 premières sont noires, la 3ème rouge et aucune restriction pour les 5 dernières : $5 \times 4 \times 3 \times 5! = 7200$.

3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : «les deux boules tirées sont rouges»

B : «les deux boules tirées sont de même couleur»

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

Tirages simultanés de deux boules : pas d'ordre ni répétition, ce sont des combinaisons.

Il existe $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ tirages possibles.

$\text{card}(A) = \binom{3}{2} = 3$ donc $P(A) = \frac{3}{28}$

$\text{card}(B) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 10 + 3 = 13$ donc $P(A) = \frac{13}{28}$

Solution de l'exercice 4 Le tournoi des 6 nations est un tournoi de rugby. Chaque équipe affronte les cinq autres une seule fois.

1. Combien de matchs sont disputés lors de ce tournoi ? Cela revient à dénombrer les combinaisons de deux équipes parmi 6 (pas d'ordre ni répétition) :

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

2. (a) Combien y a-t-il de classements différents ? Cela revient à dénombrer les permutations des 6 équipes :

$$6! = 720$$

- (b) Combien y a-t-il de classements différents avec la France à la 4^e place, sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ? Cela revient à dénombrer les permutations des 5 équipes restantes :

$$5! = 120$$

3. On demande au sélectionneur de l'équipe de France d'assister à une réunion avec les arbitres et cinq de ses joueurs. Il décide d'amener 5 joueurs parmi les 15 qui ont débuté le match.

- (a) Combien de groupes de 5 joueurs peut alors composer le sélectionneur ? Cela revient à dénombrer les combinaisons de 5 joueurs parmi 15 (pas d'ordre ni répétition) :

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \times 10!} = 3003$$

- (b) Il décide d'amener le capitaine de l'équipe. Combien de groupes de 5 joueurs peut-il alors composer ? Un joueur étant choisi, cela revient à dénombrer les combinaisons de 4 joueurs parmi 14 (15 joueurs moins le capitaine) :

$$\binom{14}{4} = 1001$$

Solution de l'exercice 5 Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre parmi A, B et C, et de 3 chiffres distincts ou non parmi les chiffres de 1 à 9.

1. Combien de codes différents peut-on former ?

Les codes sont constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers compris entre 1 et 9.

$$3 \times 9^3 = 2187$$

2. Combien de codes y a-t-il sans le chiffre 1 ? Les codes sont toujours constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers compris entre 2 et 9.

$$3 \times 8^3 = 1536$$

3. Combien de codes y a-t-il comportant au moins une fois le chiffre 1 ? Cet ensemble est le complémentaire du précédent : le contraire de « au moins un » est « aucun ».

$$2187 - 1536 = 651$$

4. Combien de codes y a-t-il comportant des chiffres distincts ? Les codes sont constitués d'une lettre (parmi 3) et d'un triplet d'entiers distincts compris entre 1 et 9.

$$3 \times \frac{9!}{(9-3)!} = 3 \times 9 \times 8 \times 7 = 1512$$

5. Combien de codes y a-t-il comportant au moins deux chiffres identiques ? Cet ensemble est le complémentaire du précédent.

$$2187 - 1512 = 675$$

