

Contrôle n° 5 : Optimisation linéaire

• • Mardi 28 janvier 2025 • •

La calculatrice est autorisée.

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Le barème est donné à titre **indicatif**.

Nom :

Prénom :

Classe : Terminale ES

Exercice n° 1 : Marché aux puces (7 points)

Monsieur François va ouvrir un marché « puces et brocante » sur son terrain. Il y a délimité 240 emplacements. L'installation des exposants commencera à 6 h, le dernier exposant devra avoir fini de s'installer à 8 h . Il prévoit que chaque exposant arrivant :

- avec une voiture, paiera 10 euros de redevance et disposera de quatre emplacements pour installer son stand,
- avec un fourgon, paiera 16 euros de redevance et disposera de six emplacements.

Il faut en moyenne 1 min à une voiture pour se garer et 4 min à un fourgon.

Pour des raisons de sécurité, chaque exposant ne peut commencer à se garer que lorsque le précédent a fini de se garer.

Monsieur François souhaite déterminer le nombre de voitures et le nombre de fourgons nécessaires pour que sa recette soit maximale.

Partie A : On note x le nombre de voitures et y le nombre de fourgons.

1. Justifier que les contraintes se traduisent par le système d'inéquations suivant où x et y sont des entiers naturels :

$$(S) \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 2x + 3y \leq 120 \\ x + 4y \leq 120 \end{cases}$$

2. On a dessiné en annexe le domaine des contraintes (les parties ne convenant pas étant hachurées). Associer à chaque droite $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ son équation.
3. Monsieur François peut-il accueillir : 50 voitures et 20 fourgons ? Justifier.

Partie B : On note R la recette de la journée.

1. Exprimer R en fonction de x et y .
2. Montrer que la droite D d'équation $y = -\frac{5}{8}x + 10$ correspond à une recette de 160 euros.
3. Trouver le couple d'entiers $(x; y)$ qui permet d'obtenir la recette maximale.
On pourra utiliser la droite D précédente.
4. Calculer alors cette recette maximale et répondre au problème posé.

Exercice n° 2 : travail d'un artisan (13 points)

Un artisan fabrique deux types de meubles pour équiper une maison :

- La fabrication d'une table A coûte 10 € en matériaux et demande 3 heures de travail.
 - La fabrication d'une chaise B coûte 20 € en matériaux et demande 1,5 heure de travail.
 - L'artisan dispose d'un budget total de 700 € pour les matériaux et d'au plus 120 heures de travail.
1. Soit x le nombre de tables A fabriquées et y le nombre de chaises B fabriquées. Expliquer pourquoi x et y satisfont le système d'inéquations suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 35 \\ y \leq -2x + 80 \end{cases}$$

2. (a) Tracer, sur l'annexe, les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = -\frac{1}{2}x + 35$ et $y = -2x + 80$ dans un repère.
- (b) Calculer les coordonnées du point I , point d'intersection de (d_1) et (d_2) .

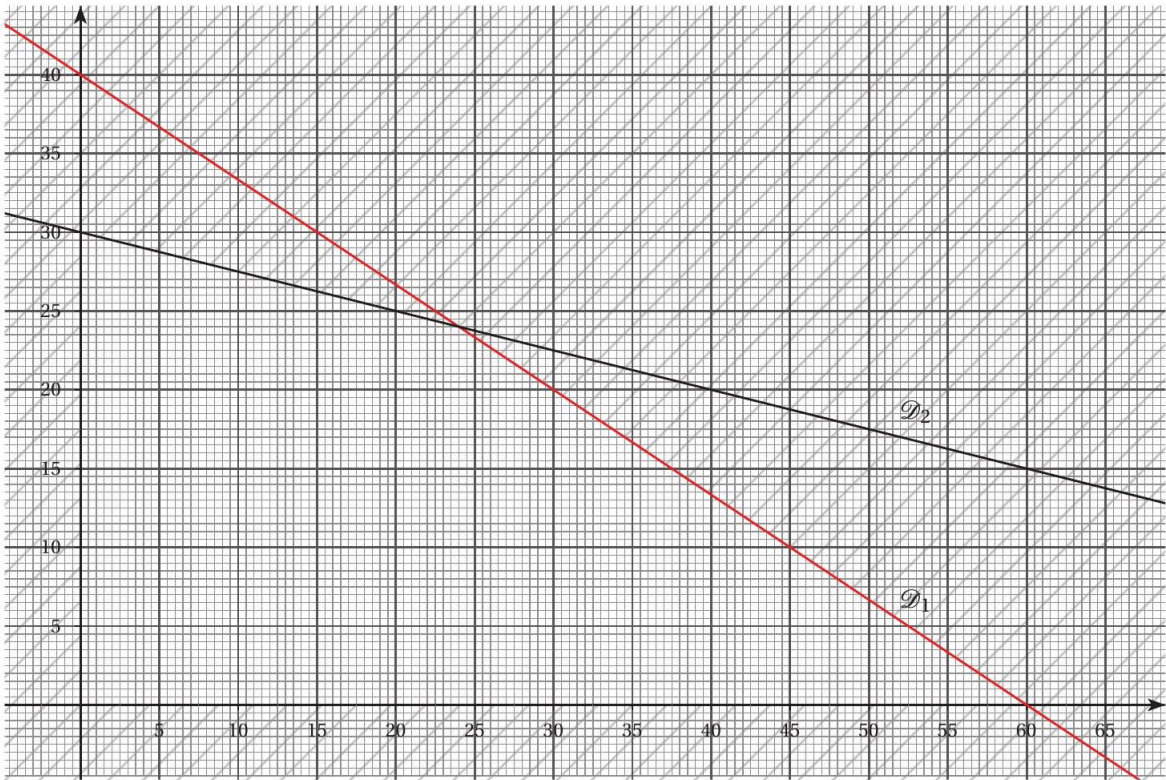
Détailler les calculs.

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système (S) . On coloriera ou hachurera les parties du plan qui ne sont pas solutions.
4. (a) L'artisan peut-il fabriquer 25 tables A et 20 chaises B ?
- (b) L'artisan peut-il fabriquer 20 tables A et 30 chaises B ?
5. Les bénéfices réalisés par l'artisan sont de 6 € par table A et 8 € par chaise B .
- (a) Expliquer pourquoi le bénéfice total b vérifie :

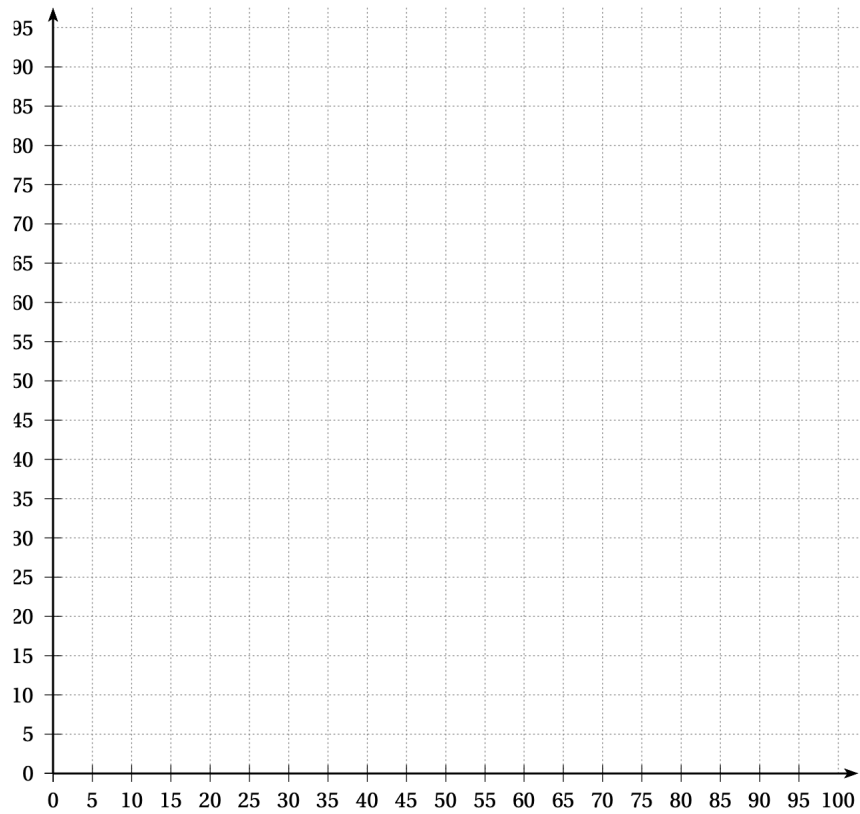
$$b = 6x + 8y$$

- (b) Tracer sur l'annexe la droite (d_{240}) qui correspond à un bénéfice total de 240 €.
- Ce bénéfice est-il atteignable par l'artisan ? Si oui, donner un exemple de répartition du nombre de tables A et B permettant ce bénéfice. Si non, justifier la réponse.
- (c) Tracer la droite (d_{400}) qui correspond à un bénéfice total de 400 €.
- Ce bénéfice est-il atteignable par l'artisan ? Si oui, donner un exemple de répartition du nombre de tables A et B permettant ce bénéfice. Si non, justifier la réponse.
- (d) En déduire le nombre de tables A et de chaises B à fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal.

Annexe à l'exercice n° 1



Annexe à l'exercice n° 2



Exercice n° 1 :

Partie A :

1. x et y sont les nombres de voitures et de fourgons, donc $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

De plus, chaque exposant arrivant avec une voiture dispose de quatre emplacements, et ceux arrivant en fourgon en disposeront de six. Il y en a 240, donc $4x + 6y \leq 240$.

En deux heures, soit 120 minutes, les exposants s'installent. Une voiture met une minute, et un fourgon en met quatre, donc $x + 4y \leq 120$.

Donc le système des contraintes est :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 4x + 6y \leq 240 \\ x + 4y \leq 120 \end{cases}$$

qui est équivalent au système attendu.

2. $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation $y = 2x + 3y = 40$ et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $x + 4y = 120$.
3. Le point de coordonnées $(50; 20)$ est dans la partie coloriée, donc Monsieur François ne peut pas accueillir 50 voitures et 20 fourgons. En effet, $(50; 20)$ ne vérifie pas la première inéquation du système.

Partie B :

1. Une voiture paie 10 euros et un fourgon paie 16 euros, donc $R = 10x + 16y$.
2. On pose $R = 160$, donc $10x + 16y = 160$.

Pour l'équation réduite,

$$10x + 16y = 160$$

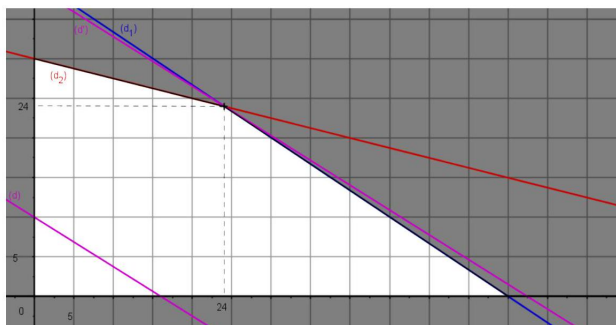
$$16y = -10x + 160$$

$$y = -\frac{10}{16}x + \frac{160}{16}$$

$$y = -\frac{5}{8}x + 10.$$

Donc l'équation réduite de (d) est $y = -\frac{5}{8}x + 10$.

3. On trace la droite parallèle à la droite (d) , qui coupe l'axe des ordonnées le plus haut possible, et qui intersecte la partie non coloriée.



La recette maximale est donnée avec $x = 24$ et $y = 24$.

4. La recette maximale est alors de 624 euros, car $10 \times 24 + 16 \times 24 = 624$.

Exercice n° 2 :

1. Comme x est un nombre de tables, alors : $x \geq 0$. Comme y est un nombre de chaises, alors : $y \geq 0$.

Les x tables A nécessitent $10x$ euros de matériaux. Les y chaises B nécessitent $20y$ euros de matériaux.

Comme l'artisan dispose d'un budget pour les matériaux limité à 700 euros :

$$10x + 20y \leq 700$$

i.e. $y \leq -\frac{1}{2}x + 35$

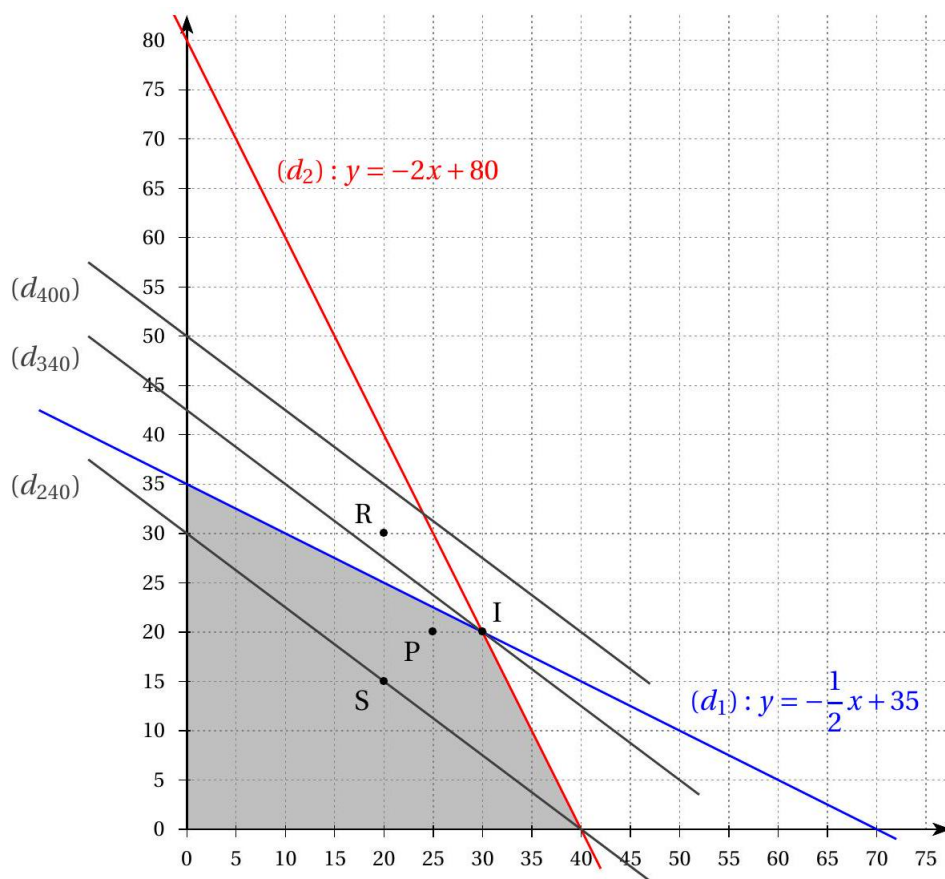
Les x tables A nécessitent $3x$ heures de travail. Les y chaises B nécessitent $1,5y$ heures de travail.

Comme l'artisan dispose d'au plus 120 heures de travail :

$$3x + 1,5y \leq 120$$

i.e. $y \leq -2x + 80$.

2. (a) Graphique :



- (b) Comme le point I est à l'intersection des droites (d_1) et (d_2) , alors ses coordonnées vérifient les deux équations de droites, ainsi

$$-\frac{1}{2}x + 35 = -2x + 80$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}x + 2x = 80 - 35$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{2}x = 45$$

c'est-à-dire

$$x = 30$$

En remplaçant, x par 30 dans la deuxième équation, par exemple :

$$y = -2 \times 30 + 20 = 20$$

Les coordonnées du point I sont données par $(30; 20)$.

3. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système (S) est le domaine grisé délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, et les droites (d_1) et (d_2) .
4. (a) Comme le point P de coordonnées $(25; 20)$ appartient au domaine grisé, alors l'artisan peut fabriquer 25 tables A et 20 chaises B .

On peut vérifier que le couple $(25; 20)$ respecte les contraintes de budget et de travail :

$$10 \times 25 + 20 \times 20 = 650 \leq 700$$

$$3 \times 25 + 1,5 \times 20 = 105 \leq 120$$

- (b) Comme le point R de coordonnées $(20; 30)$ n'appartient pas au domaine grisé, alors l'artisan ne peut pas fabriquer 20 tables A et 30 chaises B .

On peut vérifier que le couple $(20; 30)$ ne respecte pas la contrainte de budget :

$$10 \times 20 + 20 \times 30 = 800 > 700$$

5. (a) Le bénéfice réalisé par l'artisan en fabriquant x tables A est égal à $6x$ et le bénéfice réalisé en fabriquant y chaises B est égal à $8y$. Le bénéfice total b vérifie bien :

$$b = 6x + 8y$$

- (b) On a : $6x + 8y = 240 \Leftrightarrow 8y = -6x + 240 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 30$. L'équation réduite de la droite (d_{240}) est : $y = -\frac{3}{4}x + 30$.

Le point S du domaine grisé de coordonnées $(20; 30)$ appartient à la droite (d_{240}) donc un bénéfice de 240 euros est réalisable par l'artisan.

- (c) On a : $6x + 8y = 400 \Leftrightarrow 8y = -6x + 400 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 50$. L'équation réduite de la droite (d_{400}) est : $y = -\frac{3}{4}x + 50$. Aucun point du domaine grisé n'appartient à la droite (d_{400}) donc un bénéfice de 400 euros n'est pas réalisable par l'artisan.

- (d) Parmi toutes les droites (d_b) d'équation réduite $y = -\frac{3}{4}x + \frac{b}{8}$, celle qui possède la plus grande ordonnée à l'origine et qui passe par un point du domaine grisé à coordonnées entières est la droite (d_{340}) .

Le point en question est le point I . Le bénéfice maximal est donc égal à 340 euros, réalisé avec 30 tables A et 20 chaises B .