

Contrôle n° 2 : Probabilités

• • Vendredi 18 octobre 2024 • •

La calculatrice est autorisée.

Nom :

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Prénom :

Classe : Terminale ES

Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice n° 1 : Vrai ou Faux sans justification (8 points)

Cet exercice comporte trois questions indépendantes. Une question comporte quatre affirmations repérées par les lettres a , b , c et d . Aucune justification n'est demandée pour cet exercice. Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse, en inscrivant en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » à côté de l'affirmation, directement sur le sujet.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

a) X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{4}$.

b) $P(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}$

c) $P(X < 5) = 1 - P(X > 5)$

d) $E(X) = 0,75n$

a) **Faux** À la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve à deux issues, on peut associer la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de succès ; ici, il y a succès si la boule tirée est blanche, avec $p = \frac{75}{100}$, c'est-à-dire $p = \frac{3}{4}$.

Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{4}$.

b) **Vrai**

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{(2^2)^n} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \end{aligned}$$

c) **Faux**

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= 1 - P(X \geq 5) \\ &\neq 1 - P(X > 5) \text{ car } P(X = 5) \neq 0 \end{aligned}$$

d) **Vrai**

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times \frac{3}{4} \text{ car } X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n; \frac{3}{4}\right) \\ &= 0,75n \end{aligned}$$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :

- Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1% sont négatifs.
- Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).

Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.

On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».

- a) $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = 1,01$
- b) $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = P(T)$
- c) $P(T) = 2,97 \times 10^{-2}$
- d) Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

- a) **Vrai.** $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif chez un individu malade, c'est-à-dire 99 % d'après l'énoncé. Ainsi $P_M(T) = 0,99$. De même, $P_{\overline{M}}(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif chez un individu non malade, c'est-à-dire $100 \% - 98 \% = 2 \%$ d'après l'énoncé. Ainsi $P_{\overline{M}}(T) = 0,02$. Ainsi

$$P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = 1,01$$

- b) **Faux.** L'affirmation précédente est vraie, donc en raisonnant par l'absurde, si l'affirmation b) est vraie, alors $P(T) = 1,01$, ce qui est impossible, car $P(T)$ ne peut être strictement supérieure à 1. Or, on sait qu'une probabilité est toujours inférieure ou égal à 1. On corrige l'affirmation de la manière suivante :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$

c'est la formule des probabilités totales sur la partition $\{M; \overline{M}\}$.

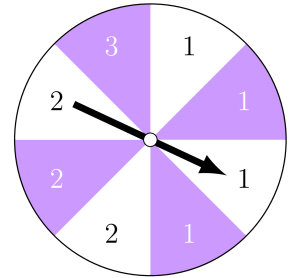
- c) **Vrai.** En utilisant la formule des probabilités totales énoncée à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,01 \times 0,99 + (1 - 0,01) \times 0,02 \\ &= 0,0297 \\ &= 2,97 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

- d) **Vrai.** Il faut utiliser la formule de Bayes pour « inverser le conditionnement ». On doit calculer $P_T(M)$:

$$\begin{aligned}
 P_T(\overline{M}) &= \frac{P(T \cap \overline{M})}{P(T)} \\
 &= \frac{P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})}{P(T)} \\
 &= \frac{0,02 \times 0,99}{0,0297} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

3. Un joueur fait tourner la roue ci-contre et gagne, en euros, le montant indiqué par la flèche lorsqu'elle s'arrête. Chaque secteur de la roue a la même probabilité d'être désigné. Soit G le gain du joueur, en euros.



- $P(G = 3) = 4 \times P(G = 1)$
- Les événements $(G = 1)$, $(G = 2)$ et $(G = 3)$ sont équiprobables.
- Lors de deux parties consécutives, la probabilité de gagner 3 euros en tout est égale à $\frac{3}{8}$
- Si on joue un grand nombre de parties, on peut espérer un gain moyen par partie de 1,625 euros.

a) **Faux.** Dans cette situation, il y a équiprobabilité. $P(G = 3) = \frac{1}{8}$ et $P(G = 1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$P(G = 3) = \frac{1}{4} \times P(G = 1)$$

b) **Faux.** Dans cette situation, il y a équiprobabilité.

- $P(G = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- $P(G = 2) = \frac{3}{8}$
- $P(G = 3) = \frac{1}{8}$

c) **Vrai.** La probabilité de gagner 3 euros en tout est la probabilité d'obtenir 1 et 2 ou d'obtenir 2 et 1. Or, les lancers sont indépendants, donc la probabilité d'obtenir 1 et 2 est $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ et la probabilité d'obtenir 2 et 1 est $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$. On obtient que la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

d) **Vrai.** L'espérance mathématique de la variable aléatoire G est

$$\begin{aligned}
 E(G) &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} \\
 &= \frac{13}{8} \\
 &= 1,625
 \end{aligned}$$

Si on joue un grand nombre de parties, on peut espérer un gain moyen par partie de 1,625 euros.

Exercice n° 2 : une épidémie bovine (12 points)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

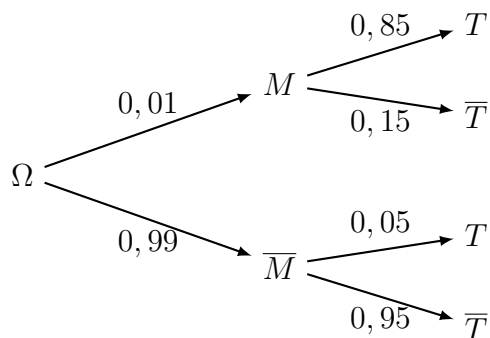
Un test est mis au point et expérimenté sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de considérer ces fréquences observées comme des probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

- M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2. Un animal est choisi au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M) \times P_M(T) \\ &= 0,01 \times 0,85 \\ &= 0,0085 \end{aligned}$$

(b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. Ainsi

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,0085 + (1 - 0,01) \times 0,05 \\ &= 0,0085 + 0,0495 \\ &= 0,058 \end{aligned}$$

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

Il faut calculer $P_T(M)$

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,0085}{0,058} \\ &\approx 0,1466 \end{aligned}$$

4. On choisit cinq-cents animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq-cents animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

On répète 500 fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli, où $S = \ll \text{le test est positif} \gg$ avec $P(S) = 0,058$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,058$.

- (b) Quelle est la probabilité qu'exactement deux animaux parmi les cinq-cents aient un test positif ?

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{500}{2} \times 0,058^2 \times (1 - 0,058)^{498} \\ &\approx 5,0147 \times 10^{-11} \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

- (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des cinq-cents animaux ait un test positif ?

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \left(\binom{500}{0} 0,058^0 \times (1 - 0,058)^{500} \right) \\ &\approx 1 - (1,0604 \times 10^{-13}) \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

- (d) En moyenne, combien d'animaux du troupeau ont un test positif ?

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,058$ donc

$$\begin{aligned} E(X) &= 500 \times 0,058 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Donc, en moyenne, 29 animaux dans un troupeau de 500 ont un test positif.

5. **(Bonus)** Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

- (a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à dépenser.

D'après le tableau :

$$\begin{aligned} E(C) &= 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 \\ &= 7,30 \end{aligned}$$

Ainsi, le coût moyen à dépenser par animal est 7,30 euros.

- (b) On rappelle que l'éleveur possède un troupeau de 500 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir ?

Pour 500 animaux, le coût sera en moyenne de $500 \times 7,30 = 3\,650$ euros.