

Contrôle n° 1 : Dénombrement

• • Vendredi 27 septembre 2024 • •

La calculatrice est autorisée.

Nom :

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Prénom :

Classe : Terminale ES

Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice n° 1 : Applications du cours (5 points)

1. Une urne contient trente-cinq boules numérotées de 1 à 35. On choisit simultanément trois boules dans cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles ?

$$\binom{35}{3}$$

2. On effectue quinze lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On écrit les résultats sur une feuille de papier, un à un, après chaque lancé. Quel est le nombre de listes possibles ?

$$2^{15} = 32\,768$$

3. Calculer A_{10}^4 . Détailler les étapes du calcul.

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$

4. Alice, Bastian, Clara, Damien, Emma et Floriane choisissent un nombre entier compris entre 1 et 6 et le notent sur une feuille l'un après l'autre.

(a) Combien de résultats peut-on obtenir ?

(b) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

(a) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ six fois par lui-même. Il y a donc $6^6 = 46\,656$ choix possibles.

(b) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est-à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc $6! = 720$ choix possibles

Exercice n° 2 : Ouverture / Fermeture (5 points)

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie. Justifier.
 2. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie si deux boulangeries ne peuvent fermer le même jour. Justifier.
 3. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte. Justifier.
-
1. Il s'agit pour chaque boulangerie d'attribuer un jour de fermeture parmi les 7 possibles. Il y a un ordre et il peut y avoir répétition. Il s'agit du nombre de 4-listes.
Il y a $7^4 = 2\,401$ façons d'attribuer un jour de fermeture.
 2. Les boulangeries ne peuvent fermer le même jour. Il n'y a plus de répétition. Il s'agit du nombre de 4-listes d'éléments distincts. $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ façons d'attribuer un jour de fermeture.
 3. Par le complémentaire : toutes les boulangeries ferment le même jour soit 7 choix.
Il y a $7^4 - 7 = 2\,394$ façons d'attribuer un jour de fermeture.

Exercice n° 3 : Un jeu de cartes (3 points)

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est formé des cartes

7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As,
dans quatre « familles » trèfle, carreau, cœur, pique.

On choisit simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement 2 carreaux et 1 pique ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins 4 carreaux ?

On tire 5 cartes simultanément, il n'y a ni ordre, ni répétition. Il s'agit de combinaisons.

1. Il y a : $\binom{32}{5} = 201\,376$ tirages possibles.
2. On prend 2 carreaux, 1 pique et 2 autres cartes qui ne sont ni carreaux, ni piques, soit

$$\binom{8}{2} \times \binom{8}{1} \times \binom{32-16}{2} = \binom{8}{2} \times \binom{8}{1} \times \binom{16}{2} = 28 \times 8 \times 120 = 26\,880 \text{ tirages}$$

3. Soit on prend 5 carreaux soit on prend 4 carreaux et une autre carte qui n'est pas un carreau, soit

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{4} \times (32 - 8) = 56 + 70 \times 24 = 1\,736 \text{ tirages.}$$

Exercice n° 4 : Comité de joueurs (7 points)

Arthur et Julien font partie d'une équipe de joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de constituer un comité de 3 joueurs, c'est-à-dire un groupe de 3 joueurs dans lequel chacun n'a pas de fonction particulière (donc l'ordre n'importe pas).

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
3. Combien y a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
4. On veut que Arthur et Julien soient ensemble dans le comité. Combien y a-t-il de comités possibles ?
5. On ne veut pas que Arthur et Julien soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
6. (Bonus) Combien y a-t-il de comités où il y a un joueur et une joueuse ?

Comme dans le comités, il n'y pas de fonctions particulières, l'ordre importe peu pour constituer le comité. Il n'y a ni ordre, ni répétition. Il s'agit de combinaisons.

1. Il y a $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ comités possibles.
2. Il y a $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} = \frac{6 \times 5}{2} \times 2 = 30$ comités contenant 2 garçons et 1 fille.
3. Il y a soit deux soit trois garçons d'où : $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{3} = 30 + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 50$ comités contenant au moins deux garçons.
4. Si Arthur et Julien sont dans le comité, il reste à prendre une personne sur les 6 restantes. Il y a donc 6 comités contenant Arthur et Julien.
5. Par le complémentaire : Arthur et Julien sont ensemble. Il y a $56 - 6 = 50$ comités où Arthur et Julien ne sont pas ensemble.

6. $\binom{8}{3} - \binom{6}{3}$

Exercice n° 5 : Un jeu de cartes

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est formé des cartes

7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As,
dans quatre « familles » (appelées couleurs) trèfle, carreau, cœur, pique.

On choisit simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement 2 carreaux et 1 pique ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant 5 carreaux ou 4 piques ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un roi ?
5. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques ?

Exercice n° 6

1. Combien de numéros de téléphone portable commencent par 06 ?
2. Parmi eux, combien ont tous leurs chiffres distincts ?
3. Combien sont des palindromes ?

On rappelle qu'un nombre palindrome est un nombre qui se lit de la même façon de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche, comme 72 344 327.

4. On s'intéresse aux numéros qui n'ont que des chiffres pairs.
 - (a) Combien y en a-t-il ?
 - (b) Combien sont des multiples de 100 ?

Exercice n° 3 : Égalité des combinaisons (3 points)

Démontrer que, pour tous entiers positifs n et p tels que $1 \leq p \leq n$,

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

On pourra commencer par écrire $\binom{n}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$ grâce à la définition du cours, puis on effectuera les calculs en développant les factorielles.

Pour tous entiers positifs n et p tels que $1 \leq p \leq n$.

$$\begin{aligned} p \binom{n}{p} &= p \times \frac{n!}{p! (n-p)!} \\ &= \frac{p \times n!}{p \times (p-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)! \times (n-p)!} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{p-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \\ &= \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \end{aligned}$$

Exercice n° 4 : la machine Enigma (9 points)

Lors de la seconde guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour envoyer des messages chiffrés, incompréhensibles pour leurs adversaires. Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers différents composants.

Le chiffrement (c'est-à-dire la méthode de codage d'une information) d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages que les Allemand utilisaient pour les envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. La première étape de chiffrement consiste à placer dans la machine trois engrenages (appelés rotors) choisis par cinq, l'ordre de positionnement étant important.
Combien y a-t-il de configurations différentes ?
 2. Chaque rotor, une fois positionné, peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. La position de chaque rotor est indépendante de celle des autres. Les trois rotors étant choisis, combien de positions différentes peut-on donner au mécanisme formé par ces trois rotors ?
 3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Six lettres resteront inchangées. Les vingt restantes seront reliées par paire à l'aide de câbles.
 - (a) Combien de manières a-t-on de choisir les six lettres inchangées ?
 - (b) Parmi les vingt lettres restantes, on en choisit deux que l'on relie à l'aide du câble numéro 1. Combien a-t-on de choix différents ?
 - (c) Parmi les dix-huit lettres restantes, on en choisit de nouveau 2 qui seront reliées par le câble numéro 2. Combien a-t-on de choix différents ?
 4. On poursuit ainsi jusqu'à ce que les vingt lettres soient toutes reliées. En remarquant que l'ordre de câblage n'a pas d'importance (inverser le câble 1 et le câble 2 donnera le même résultat), donner le nombre de câblages de la machine Enigma.
 5. En déduire un ordre de grandeur du nombre de configurations de la machine Enigma.
 6. En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, combien d'années faudrait-il pour passer en revue toutes les configurations d'Enigma ?
1. Il y a donc 5 possibilités pour le premier rotor, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités pour les rotors.
 2. Cela donne 26 placements pour le premier rotor, 26 pour le deuxième et 26 pour le troisième, soit un total de $26 \times 26 \times 26 = 17576$ possibilités
 - 3.

1. Il y a donc 5 possibilités pour le premier rotor, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités pour les rotors.
2. Cela donne 26 placements pour le premier rotor, 26 pour le deuxième et 26 pour le troisième, soit un total de $26 \times 26 \times 26 = 17576$ possibilités
3.
 1. Il y a $\binom{26}{6}$ manières de choisir 6 lettres parmi 26, soit $\frac{26!}{6!20!}$, c'est-à-dire 230230 possibilités.
 2. Il y a $\binom{20}{2}$ choix possibles
 3. Il y a alors $\binom{18}{2}$ possibilités.
4. On a alors $\binom{20}{2} \times \binom{18}{2} \times \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$ possibilités.

Cette écriture est simplifiable, puisque ce nombre vaut

$$\frac{20 \times 19}{2} \times \frac{18 \times 17}{2} \times \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{14 \times 13}{2} \times \frac{12 \times 11}{2} \times \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2} = \frac{20!}{2^{10}}$$

Or, l'ordre des câbles n'a pas d'importance : les lettres reliées par le câble 1 auraient pu l'être par le câble 2. Au total, on peut permuter les 10 câbles de $10!$ façons différentes. Le nombre de câblages d'Enigma vaut donc $\frac{20!}{2^{10} \times 10!}$ soit 654729075.

5. Le nombre de configurations de la machine Enigma vaut donc $60 \times 17576 \times 230230 \times 654729075$ soit environ 1.59×10^{20} configurations possibles !
6. En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, il faudrait environ $\frac{1.59 \times 10^{20}}{10^9 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365}$ soit 5040 années !