

■ ■ Indications

Ex. 9.1

Laissons-nous guider par le bon sens.

Ex. 9.2

Aucun calcul pour la première question, il s'agit de faire une lecture attentive de l'énoncé et c'est la clé de ce genre d'exercice.

Ex. 9.5

Pas de panique ! Faites un arbre.

Ex. 9.6

Aucune indication. La routine.

Ex. 9.7

Calculons d'abord la probabilité que le bébé soit une fille. On note N_F le nombre de filles et N_G le nombre de garçons d'une même génération. Exprimons le sexe-ratio en fonction de N_F et N_G puis la proportion de filles ...

Ex. 9.8

L'arbre est un peu atypique. Louise est sollicitée à deux moments : soit directement, soit par l'intermédiaire de Marie.

Ex. 9.10

On met en œuvre les règles des arbres ainsi que la définition des événements indépendants.

Ex. 9.11

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et quelques rappels de seconde.

■ ■ Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	F	F	V	V	V	F	V

1. L'événement « la voiture est rouge » est réalisé. On veut connaître la probabilité de l'événement « le conducteur est un homme ». Il s'agit de la probabilité conditionnelle de « le conducteur est un homme » sachant que « la voiture est rouge ».
2. La probabilité conditionnelle sachant B est une nouvelle probabilité sur l'univers restreint à B . Dans cet univers, il s'agit de deux événements contraires.
3. Si A et B sont possibles, leurs probabilités ne sont pas nulles et le produit de ces dernières non plus. Deux événements incompatibles ne sont pas indépendants puisque si l'un se produit, nous sommes sûr que le deuxième n'est pas réalisé!
4. Pour cela, il faudrait et suffirait que A et B soient indépendants...
5. Il faut que l'égalité soit exacte. Nous ne pouvons pas nous contenter d'une égalité approximative!
6. $P_B(A) = P(A)$ donc $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
7. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$. De plus A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants, donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$ et $P_{\bar{B}}(A) = P(A)$.
8. Ils sont contraires donc incompatibles.
9. $P_B(D) = 1 - (P_B(C) + P_B(E)) = 0,6$.
10. $P(B) = 1 - P(A) = 0,4$; $P(D) = 0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,6 = 0,54$; $P(B) \times P(D) = 0,216$ et $P(B \cap D) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$. Donc $P(B) \times P(D) \neq P(B \cap D)$.

❑ Erreurs classiques

- Les énoncés sont parfois ambigus mais avec un peu d'habitude, nous éviterons la confusion entre la probabilité de $A \cap B$ et la probabilité de A sachant B .
- Deux événements incompatibles possibles ne sont **jamais** indépendants. Ici, la confusion vient du fait que deux événements incompatibles ont leur intersection vide. On peut s'abuser en pensant alors que puisqu'ils ne partagent pas d'issues, ils n'ont rien à voir entre eux et donc ils sont indépendants. Ce qui n'est pas le cas.

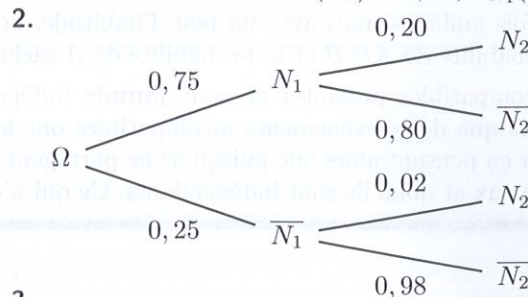
■ ■ Corrigé des exercices

Exercice 9.1

- Nous n'avons pas d'information a priori sur le tirage.
 - L'univers de l'expérience est constitué des numéros de 1 à 10. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Ω compte 10 issues.
 - Nous avons $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ soit 5 cas favorables.
 - Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité des événements élémentaires. $P(A) = \frac{5}{10} = 0,5$.
- Nous savons que le papier tiré est bleu.
 - Comme il n'y a que quatre papiers bleus, seulement quatre issues sont possibles dans ce cas parmi lesquelles trois sont favorables à l'événement A : 2, 4 et 6.
 - La probabilité d'obtenir un numéro pair devient $\frac{3}{4} = 0,75$.
 - Nous venons de calculer une probabilité conditionnelle : la probabilité de l'événement A sachant que le papier tiré est vert. Si l'on note V l'événement « le papier tiré est vert », cette probabilité s'écrit : $P_V(A)$.
 - La formule du cours est $P_V(A) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$. Or le nombre de papiers verts portant des numéros pairs est de 3. Donc $P(A \cap V) = \frac{3}{10} = 0,3$ et $P(V) = 0,4$ (4 papiers verts parmi 10). En appliquant la formule : $P_V(A) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$. Nous retrouvons le résultat précédent. ▲

Exercice 9.2

- Dans l'énoncé on lit $P(N_1) = 0,75$, $P_{N_1}(N_2) = 0,20$ et $P_{\overline{N_1}}(N_2) = 0,02$.



3.

$$P(N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(N_2) = 0,75 \times 0,20 + 0,25 \times 0,02 = 0,155.$$

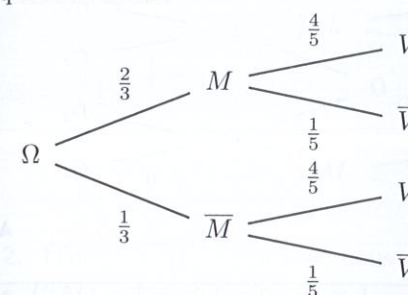
- Il s'agit de calculer $P_{N_2}(N_1)$. Par définition,

$$P_{N_2}(N_1) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{0,75 \times 0,20}{0,155} \approx 0,968.$$

On met en œuvre la méthode 9.3.

Exercice 9.3

Construisons, à l'aide de la **méthode 9.3**, l'arbre de probabilités qui représente cette situation et appliquons le cours.



Il vient $P(V) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Et d'après l'énoncé, $P(M) = \frac{2}{3}$. Nous avons $P(M) \times P(V) = \frac{8}{15}$. Calculons la probabilité de l'événement « Martin et Vincent font du tricycle en même temps ». $P(M \cap V) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. Nous constatons que $P(M \cap V) = P(M) \times P(V)$ donc d'après la **méthode 9.10**, ces deux événements sont indépendants.

Ce qui saute aux yeux dans l'arbre, c'est l'égalité des probabilités conditionnelles

$$P_M(V) = P_{\overline{M}}(V) = P(V)$$

C'est toujours le cas pour des événements indépendants. Cette égalité pointe ceci : que M se réalise ou pas, la probabilité de voir V se réaliser est la même. C'est la signification de l'indépendance de deux événements.

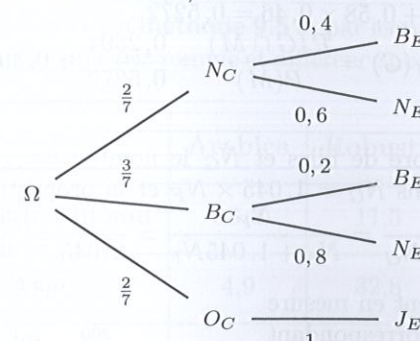
Ces égalités sont équivalentes à celle de la définition mathématique que l'on s'est donnée :

$$P(M \cap V) = P(M) \times P(V)$$

et qui cache un peu la signification profonde de la notion. ▲

Exercice 9.4

- D'après les données de l'énoncé,



- D'après l'arbre, $J_E = O_C \cap J_E$. Nous avons $P(J_E) = P(O_C \cap J_E) = \frac{2}{7} \times 1 = \frac{2}{7}$ et $P(O_C) = \frac{2}{7}$. Donc $P(J_E) \times P(O_C) = (\frac{2}{7})^2 = \frac{4}{49}$. Nous constatons que $P(O_C \cap J_E) \neq P(J_E) \times P(O_C)$ et O_C et J_E ne sont pas indépendants.
- $P(B_E) = \frac{2}{7} \times 0,4 + \frac{3}{7} \times 0,2 = 0,2$. Donc $P(B_E) \times P(O_C) = 0,2 \times \frac{2}{7}$. D'autre part $B_E \cap O_C = \emptyset$ et $P(B_E \cap O_C) = 0$. Nous constatons que $P(O_C \cap B_E) \neq P(B_E) \times P(O_C)$ et O_C et B_E ne sont pas indépendants.
- Nous avons $P(B_C) = \frac{3}{7}$ et d'après la question précédente, $P(B_E) = 0,2$. D'où $P(B_C) \times P(B_E) = \frac{3}{7} \times 0,2 = \frac{3}{35}$. Par ailleurs $P(B_C \cap B_E) = \frac{3}{7} \times 0,2 = \frac{3}{35}$. Nous constatons que $P(B_C) \times P(B_E) = P(B_C \cap B_E)$. Donc ces événements sont indépendants. ▲

Remarquons sur cet arbre élémentaire mais fondamental, que M et $\overline{V}$ sont également indépendants, mais aussi $\overline{M}$ et V ainsi que $\overline{M}$ et $\overline{V}$.

D'après la méthode 9.3.

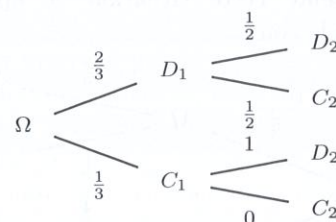
Nous avons $J_E \subset O_C$ et donc J_E implique O_C . Pas d'indépendance.

Nous avons $B_E \cap O_C = \emptyset$ et donc B_E et O_C sont incompatibles. Pas d'indépendance.

Exercice 9.5

Soit $k \in \{1, 2\}$, notons D_k l'événement « la puce est sur le chien après le saut n° k » et C_k l'événement « la puce est sur le chat après le saut n° k ». L'arbre ci-contre modélise l'expérience aléatoire. Deux chemins conduisent à l'événement E « la puce se retrouve sur le chat en deux sauts ». La règle n° 3 des arbres permet alors de conclure :

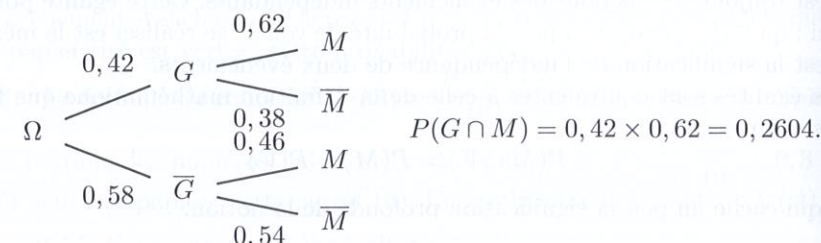
$$P(E) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3}.$$



Exercice 9.6

Posons G l'événement « la peinture de la voiture est grise » et M l'événement « la peinture de la voiture est métallisée ».

1. Lecture attentive de l'énoncé. $P_G(M) = 0,62$
2. Aidons-nous d'un arbre :



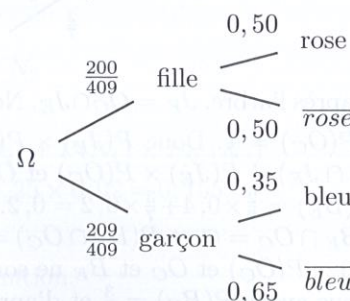
$$P(G \cap M) = 0,42 \times 0,62 = 0,2604.$$

3. $P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 0,58$. Finalement, $P(M) = 0,42 \times 0,62 + 0,58 \times 0,46 = 0,5272$.
4. Par définition, $P_M(G) = \frac{P(G \cap M)}{P(M)} = \frac{0,2604}{0,5272} \approx 0,4939$.

Exercice 9.7

On note N_F le nombre de filles et N_G le nombre de garçons d'une même génération. Nous avons $N_G = 1,045 \times N_F$ et la proportion de filles dans la génération est $\frac{N_F}{N_F + N_G} = \frac{N_F}{N_F + 1,045N_F} = \frac{1}{2,045} = \frac{200}{409}$.

Nous sommes à présent en mesure de construire l'arbre correspondant à cette situation. On peut distinguer deux circonstances dans lesquelles la règle R & B est respectée : le bébé est une fille qui porte des chaussons roses ou le bébé est un garçon avec chaussons bleus.

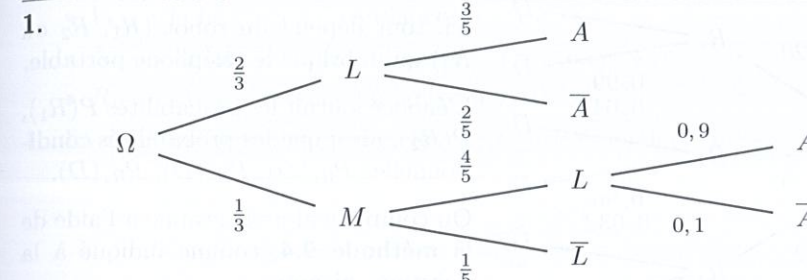


D'après la loi des probabilités totales (méthode 9.4), il vient :

$$P(R \& B \text{ respectée}) = \frac{200}{409} \times 0,35 + \frac{209}{409} \times 0,5 = \frac{3463}{8180} \approx 0,42.$$

La probabilité que la règle R & B soit respectée est donc égale à 0,42 environ. ▲

Exercice 9.8



2. D'après l'arbre ci-dessus, nous avons

- $P(M) = 1 - P(L \text{ direct}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $P(M \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{6}{25} = 0,24$
- $P_M(A) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{18}{25} = 0,72$
- $P(L) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{14}{15} \approx 0,93$.

3. Nous avons plus de chances de devenir ami(e) avec Louise en passant par Marie car

$$P_{L \text{ direct}}(A) = \frac{3}{5} < P_M(A).$$

4. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} = 0,64. \text{ On en déduit}$$

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0,24}{0,64} = 0,375. \quad \blacktriangle$$

Exercice 9.9

1. Le tableau s'obtient avec la méthode 9.5 et par lecture directe des données contenues dans l'énoncé puis par somme et différence pour les autres quantités.

	Arabica	Robusta	Total
Amérique du sud	63,3	11,3	74,6
Asie	4,9	32,8	37,7
Afrique	7,2	6,7	13,9
Total	75,4	50,8	126,2

En millions de sacs.

2. $P(A) = \frac{75,4}{126,2} \approx 0,597$, $P(A_s) = \frac{37,7}{126,2} \approx 0,299$ et $P(A_m \cap A) = \frac{63,3}{126,2} \approx 0,502$.

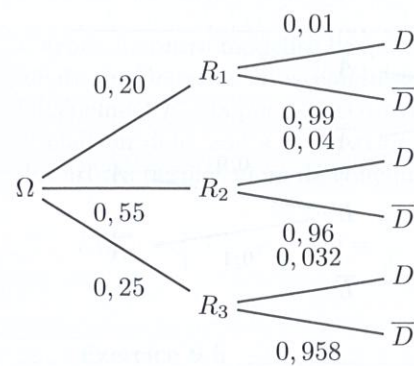
3. $P_A(A_m) = \frac{P(A \cap A_m)}{P(A)} \approx \frac{0,502}{0,597} \approx 0,841$ et

$$P_{A_f}(A) = \frac{P(A \cap A_f)}{P(A_f)} = \frac{7,2}{13,9} \approx 0,518. \quad \blacktriangle$$

Encore une fois, utilisons la méthode 9.4.

Il est possible de dresser un tableau en reportant les probabilités au lieu des quantités.

Exercice 9.10



Commençons par modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

Ici, tout dépend du robot (R_1 , R_2 ou R_3) qui fabrique le téléphone portable.

L'énoncé fournit les probabilités $P(R_1)$, $P(R_2)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_{R_1}(D)$, $P_{R_2}(D)$, $P_{R_3}(D)$.

On complète alors le graphe à l'aide de la **méthode 9.4**, comme indiqué à la question suivante.

- On applique la **méthode 9.4** des arbres : R_3 est l'événement contraire de $R_1 \cup R_2$. Il s'ensuit que $P(R_3) = 1 - (P(R_1) + P(R_2)) = 1 - (0,20 + 0,55) = 0,25$.
- On applique la **formule des probabilités totales** :
 $P(D) = 0,20 \times 0,01 + 0,55 \times 0,04 + 0,25 \times 0,032 = 0,032$.
- $P(R_3 \cap D) = 0,25 \times 0,032 = 0,008$ et $P(R_3) \times P(D) = 0,25 \times 0,032 = 0,008$. $P(R_3 \cap D) = P(R_3) \times P(D)$ donc ces événements sont indépendants.
- $R_1 \cup R_2$ est l'événement contraire de l'événement R_3 . D'après le cours et puisque R_3 et D sont indépendants, $R_1 \cup R_2$ et D le sont aussi.
- D'une part $P(R_1 \cap D) = 0,20 \times 0,01 = 0,002$ et d'autre part $P(R_1) \times P(D) = 0,20 \times 0,032 = 0,0064$. En particulier, $P(R_1 \cap D) \neq P(R_1) \times P(D)$ donc ces événements ne sont pas indépendants.
 De même $P(R_2 \cap D) = 0,55 \times 0,04 = 0,022$ et $P(R_2) \times P(D) = 0,55 \times 0,032 = 0,0176$. Par suite $P(R_2 \cap D) \neq P(R_2) \times P(D)$ et ces événements ne sont donc pas indépendants. ▲

Exercice 9.11

- $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,64 + 0,10 - 0,30 = 0,44$.
 - A et B sont incompatibles donc $P(A \cap B) = 0$ et $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,51 - 0,26 = 0,25$.
 - A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P(B) = P(A \cap B) / P(A) = 0,247 / 0,38 = 0,65$.
 - D'après le cours, si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi. Nous avons $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,33$.
 Et $P(B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) / P(\bar{A}) = 0,066 / 0,33 = 0,2$. Finalement $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$.
- Supposons A et B incompatibles. Nous avons $P(A \cap B) = 0$. D'autre part, A et B ne sont pas négligeables donc $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Donc $P(A) \times P(B) \neq 0$. Nous constatons que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$. Ces événements ne sont donc pas indépendants.
 Puisqu'ils sont incompatibles, si l'un se produit, alors l'autre ne se produit pas. La réalisation de l'un n'est pas indépendante de la réalisation de l'autre. ▲

On utilise la méthode 9.4.

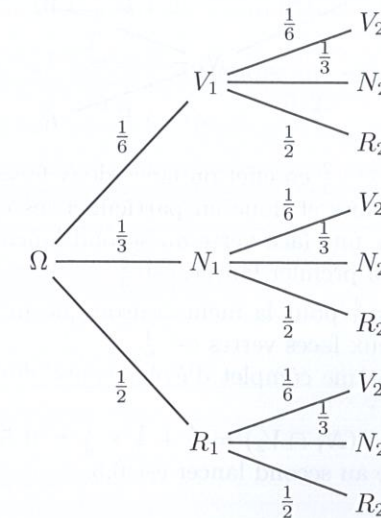
Exercice 9.12

Partie A

Soit $k \in \{1; 2\}$, on considère les événements suivants :

- V_k : « la face obtenue au lancer n° k est verte » ;
- N_k : « la face obtenue au lancer n° k est noire » ;
- R_k : « la face obtenue au lancer n° k est rouge ».

- La situation peut-être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



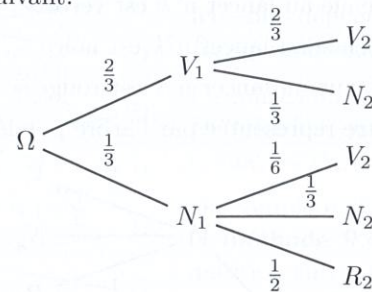
Les deux lancers sont indépendants donc les événements qui sont réalisés successivement le sont aussi, ainsi par exemple $P_{N_1}(V_2) = P(V_2) = \frac{1}{6}$.

- $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. La probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires est $\frac{1}{9}$.
- $C = (V_1 \cap V_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2)$ or les événements intervenant dans ces réunions sont deux à deux incompatibles donc
 $P(C) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2)$ de plus les expériences aléatoires étant indépendantes on peut écrire $P(C) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{18}$. La probabilité de l'événement C est $\frac{7}{18}$.
- Notons D l'événement « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de couleurs différentes », alors $D = \bar{C}$, donc $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$. La probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes est $\frac{11}{18}$.
- $P_C(V_1 \cap V_2) = \frac{P((V_1 \cap V_2) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(C)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{14}$. La probabilité qu'à l'issue d'un jeu les deux faces soient vertes sachant qu'elles sont de la même couleur est $\frac{1}{14}$.

Partie B

1.

a. Reprenons les notations de la **Partie A**, la situation peut-être représentée par l'arbre pondéré suivant.



b. $P_{V_1}(V_2) = P(V_2) = \frac{2}{3}$ en effet on lance deux fois le même dé, donc les résultats sont indépendants et donc en particulier les événements V_1 et V_2 . La probabilité d'obtenir une face verte au second lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer, est $\frac{2}{3}$.

2. $P(V_1 \cap V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ pour la même raison que précédemment, ainsi la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{4}{9}$.

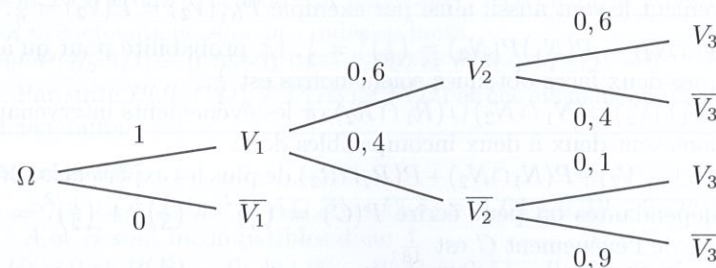
3. (V_1, N_1) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = 0,5$, ainsi la probabilité d'obtenir une face verte au second lancer est 0,5. ▲

On utilise la méthode 9.4.

Exercice 9.13

1. L'arbre synthétisant la situation jusqu'au troisième sondage est :



Il est clair alors que

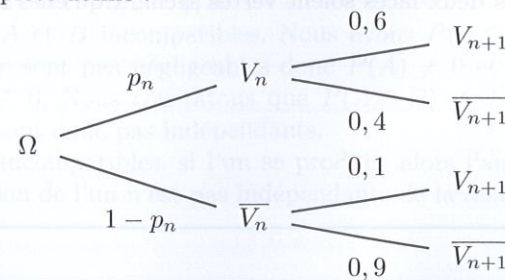
a. $P(V_2 \cap V_3) = 1 \times 0,6 \times 0,6 = 0,36$

b. $P(V_2 \cap V_3) = 1 \times 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. En lisant l'arbre précédent, il vient :

$p_3 = P(V_3) = 1 \times 0,6 \times 0,6 + 1 \times 0,4 \times 0,1 = 0,36 + 0,04 = 0,40$.

3. L'arbre complété donne :



4. Dans l'arbre précédent, en appliquant la **méthode 9.4**, la **formule des probabilités totales**, il vient :

$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,5p_n + 0,1$$

5. a. Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = (0,5p_n + 0,1) - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n$. La suite est géométrique de raison 0,5. Par ailleurs, $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$. Son premier terme est $u_1 = 0,8$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul nous avons $u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1}$ d'où $p_n = 0,2 + u_n = 0,2 + 0,8 \times 0,5^{n-1}$.

c. Puisque la raison 0,5 est comprise au sens strict entre -1 et 1 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2$. ▲